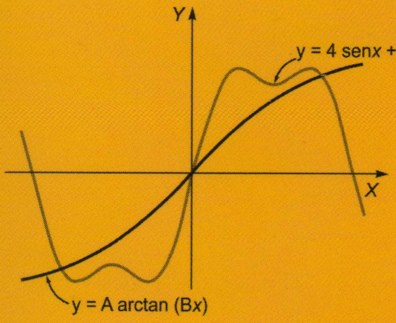
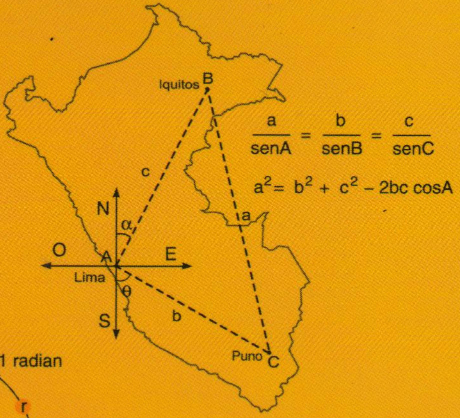
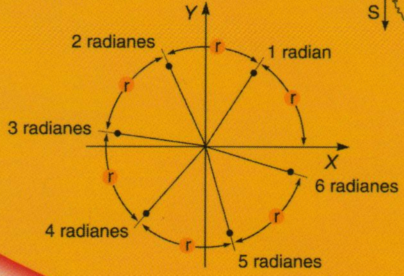
# Compendio Académico de Matemática

## TRIGONOMETRÍA





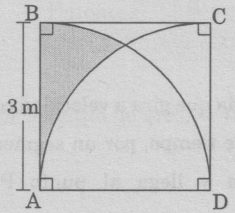
LUMBRERAS
Editores

# ÍNDICE

Página

# PROBLEMAS

**1.** Calcule perímetro de la región sombreada. Si A y D son centros.




A) $(2{,}5\pi + 3)$ m
B) $(3\pi + 5)$ m
C) $(1{,}25\pi - 3)$ m
D) $(1{,}5\pi + 3)$ m
E) $(2\pi + 5)$ m

**2.** En un nuevo sistema de medida angular R, se establece que un grado R es equivalente a un ángulo central que subtiene un arco de longitud igual a la quinta parte de la longitud de radio. Halle la medida del ángulo recto en este nuevo sistema.

A) $\dfrac{5\pi}{2}$ "grados R"

B) $\dfrac{5\pi}{4}$ "grados R"

C) $\dfrac{2\pi}{3}$ "grados R"

D) $\dfrac{7\pi}{2}$ "grados R"

E) $\dfrac{4\pi}{5}$ "grados R"

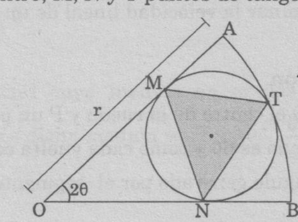
**3.** Determine el valor : cos(10R) siendo S , C y R número conocido para un ángulo de giro horario que verifica

$$\frac{1}{C(C+4)}+\frac{1}{(C+4)(C+8)}+\frac{1}{(C+8)(C+12)}+\ldots+\frac{1}{(C+2S-4)(C+2S)}=\frac{S}{35}$$

A) $\dfrac{\sqrt{2\sqrt{2}}}{2}$ B) $\dfrac{\sqrt{3-\sqrt{3}}}{2}$ C) $\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

D) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ E) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

**4.** Determine el área de la región sombreada en términos de r y θ sabiendo que, O: centro, M, N y T puntos de tangencia.




A) $\dfrac{r^2}{2}(1 + \text{sen}\,\theta)$

B) $r^2\,\text{sen}^2\theta\cos\theta$

C) $r^2\,\text{sen}\theta\cos\theta$

D) $\dfrac{r^4}{2}(1 - \text{sen}\,\theta)^2$

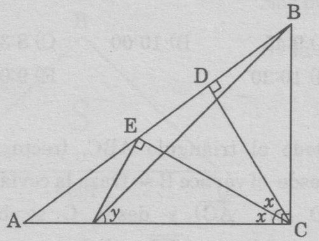
E) $r^2\tan\theta\,\text{sen}\theta\,(1 - \text{sen}\,\theta)$

**6.** En un triángulo ABC se traza la ceviana BP (P en AC) y la perpendicular AH (H en BP) si BH = 3, HP = 1, HC = 2, además m∢ BAH = $\theta$, m∢HCA = $\alpha$

Determine $M = 9\cot^2\alpha - 4\tan^2\theta$

A) 9 B) 3 C) 18
D) 21 E) 27

**7.** Del gráfico mostrado, halle el valor de $\tan x + \tan y$; siendo: AB = 3AE




A) $\frac{3\sqrt{5}}{5}$ B) $\frac{4\sqrt{5}}{5}$ C) $\frac{7\sqrt{5}}{5}$

D) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ E) $\frac{7\sqrt{5}}{10}$

**8.** Si $\alpha$ y $\beta$ son ángulos agudos y la ecuación $(\operatorname{sen}\alpha).x^2 + 2x\operatorname{sen}\alpha + \cos\beta = 0$ tiene una única solución; entonces se puede afirmar

A) $\alpha+\beta = \frac{\pi}{4}$

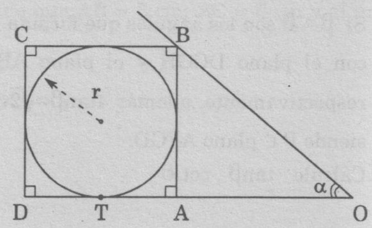
B) $\alpha+\beta = \frac{\pi}{2}$

C) $\frac{\pi}{2} < \alpha+\beta \; \frac{\pi}{2}$

D) $\frac{\pi}{2} < \alpha+\beta < \frac{3\pi}{4}$

E) $0 < \alpha+\beta < \frac{\pi}{2}$

**9.** Del gráfico mostrado, calcule $\cot\frac{\alpha}{2}$ siendo OA = 12 y r = 2,5
(T: punto de tangencia)

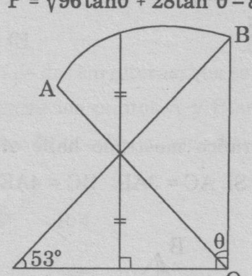



A) 5 B) $\frac{3}{5}$ C) $\frac{4}{5}$

D) $\frac{1}{5}$ E) $\frac{2}{5}$

**10.** En la figura se muestra el sector circular AOB, del cual se pide calcule el valor de

$$P = \sqrt{96\tan\theta + 28\tan^2\theta - 8}$$




A) 16 B) 9 C) 7
D) 10 E) 12

**11.** Calcule el valor de $\alpha$ si

$\operatorname{sen}(a\cot^2 30°)\sec(b\csc^2 45°) = 1$ y

$$\tan\alpha = \frac{\cos 2b\cot(a+b)}{\tan(2a+b)\operatorname{sen}3a}$$

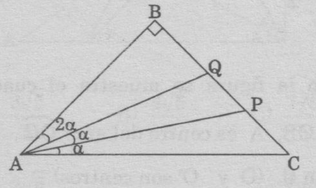
A) 60° B) 50° C) 30°
D) 45° E) 37°

**17.** En una circunferencia de centro O, por el punto medio M del arco AMB se traza la cuerda MN paralela al radio OA. Calcule la secante del ángulo AOM sabiendo que la cuerda MN es dividida en dos partes iguales por la cuerda AB.

A) $\dfrac{\sqrt{5}+2}{4}$  B) $\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}$  C) $\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$

D) $\dfrac{\sqrt{3}+1}{4}$  E) $\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$

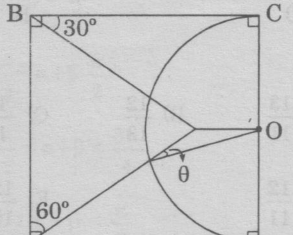
**18.** Calcule $\cos 2\alpha \sec \alpha \sec 3\alpha$ en términos de a y b. Si PC = a y PQ = b




A) 1+a+b  B) $\dfrac{2a}{a+b}$  C) $\dfrac{a+b}{b}$

D) a + b  E) (a + b) (a − b)

**19.** En el gráfico mostrado se tiene el cuadrado ABCD de lado 4 m. Halle el valor de csc θ; si O: centro




A) $2(2+\sqrt{3})$

B) $\dfrac{8(3\sqrt{3}-2)}{23}$

C) $4(2-\sqrt{3})$

D) $\dfrac{3+\sqrt{3}}{3}$

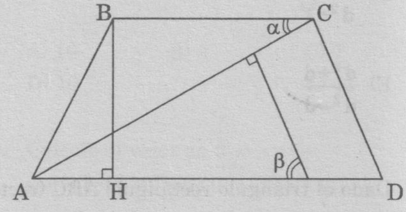
E) $5(2-\sqrt{3})$

**20.** En un triángulo rectángulo ABC (recto en B) se tiene que θ es el mayor ángulo agudo. ¿Qué valores puede tomar E para que la siguiente igualdad $3E-\sqrt{2}\,\mathrm{sen}(90°-\theta)=3$ sea correcta?

A) $\left\langle \dfrac{1}{4};\dfrac{3}{4}\right\rangle$  B) $\left\langle 0;\dfrac{3}{4}\right\rangle$  C) $\left\langle \dfrac{1}{2};\dfrac{4}{5}\right\rangle$

D) $\left\langle 1;\dfrac{4}{3}\right\rangle$  E) $\left\langle \dfrac{3}{2};\dfrac{4}{3}\right\rangle$

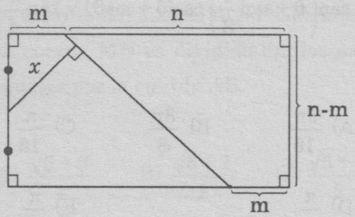
**21.** En la figura se muestra el trapecio isósceles ABCD donde se cumple $AH = BC = \dfrac{2}{3}AB$. Halle $\cos\alpha + \csc\beta$




A) $\dfrac{37\sqrt{7}}{84}$  B) $\dfrac{37\sqrt{3}}{48}$  C) $\dfrac{37\sqrt{21}}{48}$

D) $\dfrac{37\sqrt{21}}{84}$  E) $\dfrac{\sqrt{21}}{84}$

**28.** Del gráfico adjunto, halle x en términos de m y n.




A) $(2m-n)\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

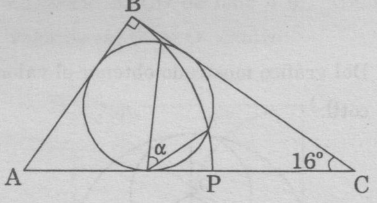
B) $(2n-m)\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

C) $\dfrac{n\sqrt{2}}{2}$

D) $(m+n)\dfrac{\sqrt{2}}{4}$

E) $\dfrac{m\sqrt{2}}{2}$

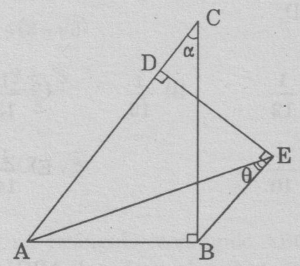
**29.** Siendo A el centro del arco BP, halle el valor de: $\cot\dfrac{\alpha}{2}+\tan\alpha$




A) $2\sqrt{3}$ B) $3\sqrt{3}$ C) $5\sqrt{3}$

D) $\sqrt{3}$ E) $\dfrac{3}{2}\sqrt{3}$

**30.** Del gráfico mostrado; halle $7\cot\theta$ en términos de $\alpha$, si AD = 6DC




A) $\sec\alpha\csc\alpha$

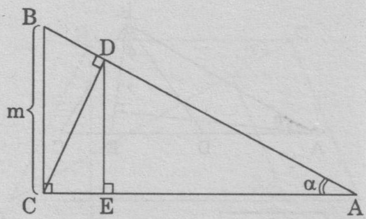
B) $\dfrac{1}{\tan\alpha+\cot\alpha}$

C) $6(\tan\alpha+\cot\alpha)$

D) $\dfrac{1}{\operatorname{sen}\alpha+\cos\alpha}$

E) $\dfrac{1}{\sec\alpha+\csc\alpha}$

**31.** De la figura, halle $\overline{DE}$ en términos de m y $\alpha$.




A) $m\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha$

B) $m\tan\alpha\operatorname{sen}\alpha$

C) $m\cot\alpha\csc\alpha$

D) $m\operatorname{sen}^2\alpha$

E) $m\cos^2\alpha$

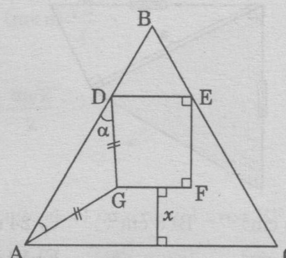
**38.** En un triángulo acutángulo ABC se inscribe una circunferencia de radio K, calcule $M=\dfrac{p}{k\left(\cot\dfrac{A}{2}+\cot\dfrac{B}{2}+\cot\dfrac{C}{2}\right)}$

siendo p: semiperímetro.

A) 2 B) 1 C) $\frac{1}{3}$

D) $\frac{2}{3}$ E) $\frac{1}{2}$

**39.** Dado el triángulo equilátero ABC y el trapecio DEFG. Calcule $x$ en términos de $\alpha$. Si AG = GD = 5; EF = $2\sqrt{5}$




A) $5(\cos\alpha-1)$

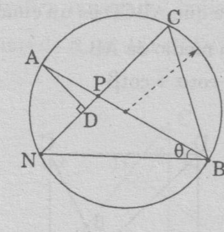
B) $\sqrt{3}(5\cos\alpha-\sqrt{3})$

C) $5\cos\alpha-4$

D) $(5\sqrt{3}\cos\alpha-2\sqrt{5})$

E) $10(\cos\alpha-\sqrt{3})$

**40.** De la figura mostrada, halle $(AD)^{-1}.CB$ en términos de a,b y $\theta$
siendo: AP = a , NB = (a+b) cos $\theta$




A) $ba^{-1}\sec\theta$

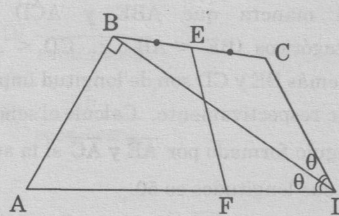
B) $a^2b^2\cos^3\theta\,\mathrm{sen}\theta$

C) $(a+b)\cot\theta\cos\theta$

D) $ab^{-1}\sec\theta$

E) $(a+b)\tan\theta\,\mathrm{sen}2\theta$

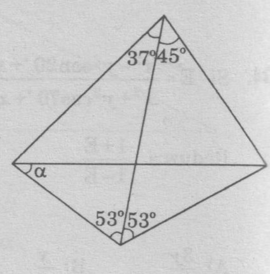
**41.** Halle EF en términos de $\theta$; si: AD = 4FD
AF = 3CD; AB = 8




A) $2\csc\theta$ B) $4\csc\theta$ C) $3\csc\theta$

D) $2{,}5\,\mathrm{sen}\theta$ E) $3\,\mathrm{sen}\theta$

**42.** Determine el valor $\cot\alpha$




A) $\frac{5}{4}$

B) $\frac{8}{7}$

C) $\frac{4}{5}$

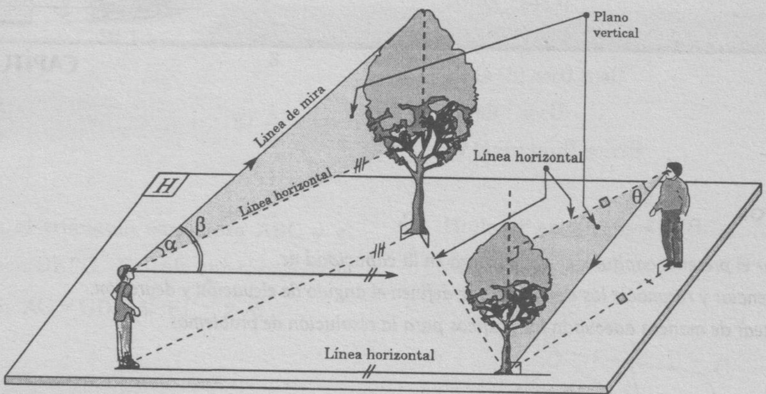
D) $\frac{7}{6}$ E) $\frac{6}{7}$

## Ángulos Verticales

Son aquellos ángulos contenidos en un plano vertical formados por la línea de mira (o visual) y la línea horizontal. Que parten de la vista del observador. Los ángulos verticales pueden ser:

### ÁNGULOS DE ELEVACIÓN

Es el ángulo formado por la línea horizontal y la línea de mira cuando el objeto se encuentra por encima de la línea horizontal.

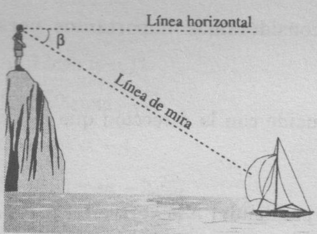



En la figura se muestra la ubicación de los ángulos de elevación y depresión.

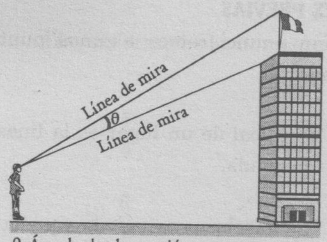
- $\alpha$: Es la medida del ángulo de elevación, porque se encuentra contenido en plano vertical.
- $\theta$: Es la medida del ángulo de depresión, porque está contenido en un plano vertical.
- $\beta$: No es un ángulo de elevación por que esta contenido en un plano inclinado.

### ÁNGULOS DE DEPRESIÓN

Es aquel ángulo formado por la línea horizontal y la línea de mira cuando el objeto se encuentra por debajo de la línea horizontal.




$\beta$: Ángulo de depresión




$\theta$ Ángulo de observación

**Nota**

Al ángulo formado por dos líneas de mira se denomina ángulo de observación o de visibilidad.

**6.** Una colina tiene una inclinación de$16^\circ$ con respecto a la horizontal. Una estatua de 25 m se encuentra en la parte alta de la colina. ¿A que distancia de la base de la estatua debe ubicarse un topógrafo para ver la parte superior de la estatua con un ángulo de elevación de $53^\circ$ ?

A) 25 m B) 20 m C) 40 m
D) 35 m E) 30 m

**7.** Para calcular la altura de un nevado, un especialista observa la cima del nevado con un ángulo de elevación $\theta$, luego se acerca una distancia d y observa el mismo punto con un ángulo de elevación $\phi$, si la altura del instrumento que utiliza el especialista es h, halle la altura del nevado.

A) $\dfrac{d}{\tan\theta - \tan\phi} + h$

B) $\dfrac{d}{\cos\theta - \cos\phi}$

C) $\dfrac{d}{\tan\phi - \tan\theta} + h$

D) $\dfrac{d}{\cot\theta - \cot\phi} + h$

E) $\dfrac{d}{\cot\theta + \cot\phi} + h$

**8.** Desde un avión que se encuentra a una altura H se observa la parte más alta y la parte más baja de una torre de altura h con ángulos de depresión de $45^\circ$ y $60^\circ$ respectivamente; halle $\dfrac{H}{h}$.

A) $\dfrac{3-2\sqrt{3}}{2}$ B) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ C) $\dfrac{3-\sqrt{3}}{2}$

D) $\dfrac{3+\sqrt{3}}{2}$ E) $\dfrac{3+2\sqrt{3}}{2}$

**9.** Desde la parte superior de la torre de control de un aeropuerto se observa un avión que desciende a velocidad constante y con una inclinación de $37^\circ$ respecto a la horizontal con un ángulo de elevación de $46^\circ$; luego de 5 s el nuevo ángulo de elevación es de $16^\circ$ . Halle la velocidad con el cual desciende el avión si las longitudes de los visuales son 600 m y a m respectivamente.

Considere $\sqrt{3} = 1{,}73$

A) 50 m/s B) 120 m/s C) 40 m/s
D) 90 m/s E) 75 m/s

**10.** Desde cada extremo de un camino rectilíneo, el ángulo de elevación para la parte superior de una torre es $\theta$ y desde el punto medio del camino la elevación es $\phi$. Halle la altura de la torre si la longitud del camino es $2\ell$.

A) $\dfrac{\ell}{2}(\cot^2\theta - \cot^2\phi)^{-\frac{1}{2}}$

B) $\ell\,(\tan^2\theta - \tan^2\phi)^{-\frac{1}{2}}$

C) $\ell\,\sqrt{\cot^2\theta - \cot^2\phi}$

D) $\ell\,(\cot^2\theta - \cot^2\phi)^{-\frac{1}{2}}$

E) $\ell\,(\cot^2\phi - \cot^2\theta)^{-\frac{1}{2}}$

# PROBLEMAS

**1.** Halle los valores de $\theta$, positivos y menores de una vuelta, para que se cumpla: $\cos\theta = \dfrac{\text{sen}^2\alpha}{1+\text{sen}^4\alpha}$

A) $\left[\dfrac{\pi}{3};\dfrac{\pi}{2}\right\rangle \cup \left\langle\dfrac{3\pi}{2};\dfrac{7\pi}{4}\right]$

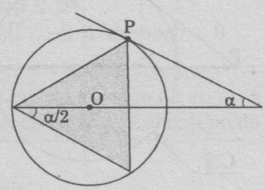
B) $\left[\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{2}\right\rangle \cup \left\langle\dfrac{3\pi}{2};\dfrac{5\pi}{3}\right]$

C) $\left[\dfrac{\pi}{3};\dfrac{\pi}{2}\right\rangle \cup \left\langle\dfrac{3\pi}{2};\dfrac{5\pi}{3}\right]$

D) $\left[\dfrac{\pi}{6};\dfrac{\pi}{2}\right\rangle \cup \left\langle\dfrac{3\pi}{2};\dfrac{7\pi}{3}\right]$

E) $\left[\dfrac{\pi}{3};\dfrac{\pi}{2}\right] \cup \left[\dfrac{3\pi}{2};\dfrac{5\pi}{3}\right]$

**2.** Si el radio de la circunferencia es igual a 1. Calcule el área sombreada. Siendo P punto de tangencia.




A) $2\cos\alpha\ \text{sen}\left(45^\circ-\dfrac{\alpha}{2}\right)$

B) $\sqrt{2}\cos\dfrac{\alpha}{2}\cos\left(45^\circ-\dfrac{\alpha}{2}\right)$

C) $4\ \text{sen}\ \alpha\ \text{sen}\left(45^\circ-\dfrac{\alpha}{2}\right)$

D) $4\ \text{sen}\alpha\cos\left(45^\circ-\dfrac{\alpha}{2}\right)$

E) $\sqrt{2}\text{sen}\dfrac{\alpha}{2}\ \text{sen}(45^\circ+\alpha)$

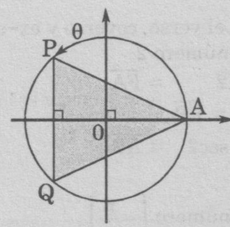
**3.** Determine los valores de $\beta$ para que se verifique la igualdad

$$|2\text{sen}\beta-1|-|1+2\cos\beta|=2|\text{sen}\beta-\cos\beta-1|$$

A) $\left[\dfrac{\pi}{3};\dfrac{2\pi}{3}\right]$ B) $\left[\dfrac{\pi}{2};\dfrac{2\pi}{3}\right]$ C) $\left[\dfrac{\pi}{4};\dfrac{3\pi}{4}\right]$

D) $\left[\dfrac{\pi}{6};\dfrac{5\pi}{6}\right]$ E) $\left[\dfrac{\pi}{6};\dfrac{2\pi}{3}\right]$

**4.** En la circunferencia trigonométrica mostrada. Calcule el radio de la circunferencia inscrita en el triángulo sombreado.




A) $\dfrac{1-\cos\theta}{1+\cos\dfrac{\theta}{2}}$ B) $\dfrac{1+\cos\theta}{1-\cos\dfrac{\theta}{2}}$ C) $\dfrac{1-\cos\theta}{1+\sec\dfrac{\theta}{2}}$

D) $\dfrac{1-\cos\theta}{1+\csc\dfrac{\theta}{2}}$ E) $\dfrac{1-\cos\theta}{1-\sec\dfrac{\theta}{2}}$

**5.** Determine los valores de

$N = \dfrac{3+\tan^2\theta}{1-\tan\theta}$; siendo $\theta \in \left\langle-\dfrac{3\pi}{2};-\dfrac{3\pi}{4}\right\rangle$

A) $[-2;\infty\rangle$ B) $[3;\infty\rangle$ C) $[2;\infty\rangle$

D) $\langle 1;\infty\rangle$ E) $[1;\infty\rangle$

*Ejemplos:*

- $-2 \le \sqrt{3}\text{sen}x + \cos x \le 2$
- $-\sqrt{5} \le 2\text{sen}x - \cos x \le \sqrt{5}$
- $-\sqrt{13} \le 3\text{sen}x + 2\cos x \le \sqrt{13}$

3. • Si $A+B+C = \pi$ , se cumple :

$\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \tan B \tan C$

$\cot A \cot B + \cot A \cot C + \cot B \cot C = 1$

• Si $A+B+C = \dfrac{\pi}{2}$, se cumple:

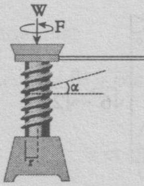
$\cot A + \cot B + \cot C = \cot A \cot B \cot C$

$\tan A \tan B + \tan B \tan C + \tan A \tan C = 1$

**Nota**

En forma general si $A+B+C=k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) ó $A+B+C=(2k+1)\dfrac{\pi}{2}$ ($k \in \mathbb{Z}$) las relaciones del teorema número 3 siguen siendo válidas.

**Aplicación:**




Los gatos mecánicos de tornillo, utilizados para levantar casas o maquinaria pesada, deben diseñarse de manera que el tornillo no gire cuando soporta carga. En la figura, F significa el esfuerzo necesario para mantener el equilibrio, cuando el gato tiene un ángulo de inclinación $\alpha$ en cada paso de su tornillo y se le aplica una carga W. Dicho esfuerzo se representa mediante la ecuación: $F = Wr\tan(\alpha - \theta)$ . Si $\alpha = 45°$, exprese F como una función de $\theta$ (ángulo de fricción).

**Resolución:**

$F = Wr\tan(45° - \theta)$

Desarrollando la tangente:

$$F = Wr\left(\frac{\tan 45° - \tan\theta}{1 + \tan 45° \tan\theta}\right)$$

$$\therefore F = Wr\left(\frac{1 - \tan\theta}{1 + \tan\theta}\right)$$

## Reducción al Primer Cuadrante

Hasta esta parte en la explicación de los diversos temas, el lector habrá observado posiblemente que una función trigonométrica de un número real cualquiera puede expresarse como función de un número real del primer cuadrante. Esto puede mostrarse a partir de ciertas fórmulas de reducción que se deducen a partir de las identidades de arcos compuestos dando valores particulares.

Recordemos que:

$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha \cos\beta - \text{sen}\alpha\, \text{sen}\beta$

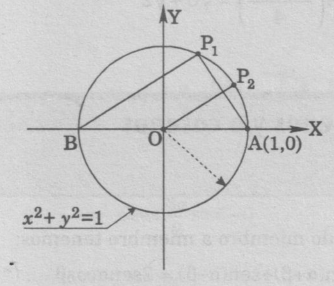
Si sustituimos $\alpha$ por $\dfrac{\pi}{2}$ obtenemos:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \beta\right) = \cos\frac{\pi}{2}\cos\beta - \text{sen}\frac{\pi}{2}\text{sen}\beta$$

y como: $\cos\dfrac{\pi}{2} = 0$ y $\text{sen}\dfrac{\pi}{2} = 1$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \beta\right) = -\text{sen}\beta$$

A continuación te planteamos el siguiente problema con la finalidad que tengas presente que las identidades anteriores también son demostrables partiendo del estudio de la C.T.




En la circunferencia de la figura anterior, $P_2$ es el punto medio del arco $AP_1$ cuya longitud es $\theta$, con $0<\theta<\frac{\pi}{2}$

Si $BP_1$ es paralela a $OP_2$, demuestre que:

- $\operatorname{sen}\theta = 2\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$
- $\cos\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}$

## IDENTIDADES DE ARCO TRIPLE

$$\operatorname{sen}3\alpha = 3\operatorname{sen}\alpha - 4\operatorname{sen}^3\alpha$$
$$\cos3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$$
$$\tan3\alpha = \frac{3\tan\alpha-\tan^3\alpha}{1-3\tan^2\alpha}$$

*Ejemplos*:

$\operatorname{sen}48° = 3\operatorname{sen}16° - 4\operatorname{sen}^3 16°$

$\cos24° = 4\cos^3 8° - 3\cos8°$

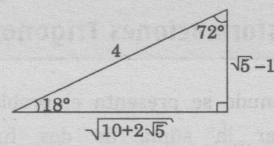
$\tan111° = \frac{3\tan37° - \tan^3 37°}{1-3\tan^2 37°}$

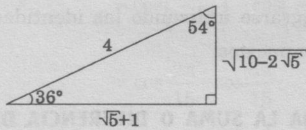
$$\operatorname{sen}\alpha = 3\operatorname{sen}\frac{\alpha}{3} - 4\operatorname{sen}^3\frac{\alpha}{3}$$

$$\cos2\alpha = 4\cos^3\frac{2\alpha}{3} - 3\cos\frac{2\alpha}{3}$$

$$\tan12x = \frac{3\tan4x - \tan^3 4x}{1-3\tan^2 4x}$$

**Triángulos rectángulos de 18° y 36°**




## Identidades auxiliares

*i.* $4\operatorname{sen}^3\alpha = 3\operatorname{sen}\alpha - \operatorname{sen}3\alpha$

*ii.* $4\cos^3\alpha = 3\cos\alpha + \cos3\alpha$

*iii.* $\operatorname{sen}3\alpha = \operatorname{sen}\alpha(2\cos2\alpha+1)$

*iv.* $\cos3\alpha = \cos\alpha(2\cos2\alpha-1)$

*v.* $\frac{\tan3\alpha}{\tan\alpha} = \frac{2\cos2\alpha+1}{2\cos2\alpha-1}$

*vi.* $\operatorname{sen}3\alpha = 4\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}(60°-\alpha)\operatorname{sen}(60°+\alpha)$

*vii.* $\cos3\alpha = 4\cos\alpha\cos(60°-\alpha)\cos(60°+\alpha)$

*viii.* $\tan3\alpha = \tan\alpha\tan(60°-\alpha)\tan(60°+\alpha)$

*Ejemplo*:

Determine el valor de:

a. $\operatorname{sen}10°\operatorname{sen}50°\operatorname{sen}70°$

b. $16\cos5°\cos55°\cos65°$

- $$\cos\frac{\pi}{5}+\cos\frac{\pi}{6} = 2\cos\left(\frac{\frac{\pi}{5}+\frac{\pi}{6}}{2}\right)\cos\left(\frac{\frac{\pi}{5}-\frac{\pi}{6}}{2}\right)$$

$$= 2\cos\frac{11\pi}{60}\cos\frac{\pi}{60}$$

- $$\cos\frac{\alpha}{2}-\cos\frac{5\alpha}{2} = -2\operatorname{sen}\left(\frac{\frac{\alpha}{2}+\frac{5\alpha}{2}}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\frac{\alpha}{2}-\frac{5\alpha}{2}}{2}\right)$$

$$= -2\operatorname{sen}\frac{3\alpha}{2}\operatorname{sen}(-\alpha)$$

$$= 2\operatorname{sen}\frac{3\alpha}{2}\operatorname{sen}\alpha$$

**PROPIEDADES**

Si: A+B+C= 180°, se cumple:

$$\operatorname{sen}A+\operatorname{sen}B+\operatorname{sen}C = 4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$$
$$\cos A+\cos B+\cos C = 4\operatorname{sen}\frac{A}{2}\operatorname{sen}\frac{B}{2}\operatorname{sen}\frac{C}{2}+1$$
$$\operatorname{sen}2A+\operatorname{sen}2B+\operatorname{sen}2C = 4\operatorname{sen}A\operatorname{sen}B\operatorname{sen}C$$
$$\cos 2A+\cos 2B+\cos 2C = -4\cos A\cos B\cos C-1$$

## II DE PRODUCTO DE DOS TÉRMINOS, SENOS Y/O COSENOS A SUMA O DIFERENCIA.

$$2\operatorname{sen}A\cos B = \operatorname{sen}(A+B)+\operatorname{sen}(A-B)$$
$$2\cos A\cos B = \cos(A+B)+\cos(A-B)$$
$$2\operatorname{sen}A\operatorname{sen}B = \cos(A-B)-\cos(A+B)$$

*Ejemplos*:

- $$2\operatorname{sen}4\theta\cos\theta = \operatorname{sen}(4\theta+\theta)+\operatorname{sen}(4\theta-\theta)$$
$$= \operatorname{sen}5\theta+\operatorname{sen}3\theta$$

- $$2\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right) =$$

$$= \cos\left(\alpha-\frac{\pi}{4}+\alpha+\frac{\pi}{4}\right)+\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{4}-\alpha-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$= \cos 2\alpha+\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)$$

$$= \cos 2\alpha+\cos\frac{\pi}{2}$$

$$= \cos 2\alpha$$

- $$2\operatorname{sen}\frac{\pi}{5}\operatorname{sen}\frac{\pi}{3} = \cos\left(\frac{\pi}{5}-\frac{\pi}{3}\right)-\cos\left(\frac{\pi}{5}+\frac{\pi}{3}\right)$$

$$= \cos\left(\frac{-2\pi}{15}\right)-\cos\left(\frac{8\pi}{15}\right)$$

$$= \cos\frac{2\pi}{15}-\cos\frac{8\pi}{15}$$

*Ejercicio*:

Exprese $\cos 3\theta\operatorname{sen}2\theta$ como una suma o una diferencia.

***Resolución***

Utilizando la primera identidad se tiene:

$$\cos 3\theta\operatorname{sen}2\theta = \frac{2\cos 3\theta\operatorname{sen}2\theta}{2}$$

$$= \frac{1}{2}(2\operatorname{sen}2\theta\cos 3\theta)$$

$$= \frac{1}{2}(\operatorname{sen}(2\theta+3\theta)+\operatorname{sen}(2\theta-3\theta))$$

$$= \frac{1}{2}(\operatorname{sen}5\theta+\operatorname{sen}(-\theta))$$

$$\therefore \cos 3\theta\operatorname{sen}2\theta = \frac{1}{2}(\operatorname{sen}5\theta-\operatorname{sen}\theta)$$

**Para la suma de senos cuyos ángulos están en progresión aritmética:**

$$\sum_{k=1}^{n} \operatorname{sen}[\alpha+(k-1)r] = \frac{\operatorname{sen}\frac{nr}{2}}{\operatorname{sen}\frac{r}{2}} \operatorname{sen}\left(\frac{P+U}{2}\right)$$

**Para la suma de cosenos cuyos ángulos están en progresión aritmética:**

$$\sum_{k=1}^{n} \cos[\alpha+(k-1)r] = \frac{\operatorname{sen}\frac{nr}{2}}{\operatorname{sen}\frac{r}{2}} \cos\left(\frac{P+U}{2}\right)$$

Donde:

- $\sum_{k=1}^{n}$ representa la simbología de una sumatoria y se lee: sumatoria desde k=1 hasta n.
- n : es la cantidad de términos que presenta la sumatoria.
- r : es la razón de la progresión aritmética del ángulo.
- P : primer ángulo de la serie
- U : último ángulo de la serie

***Ejemplo***:

Determine el valor de M, siendo:

$$M = \cos 5° + \cos 10° + \cos 15° + \ldots + \cos 355°$$

***Resolución***

En dicha sumatoria podemos indicar que:

n = 71 y r = 5°, luego:

$$M = \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{71\times 5°}{2}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{5°}{2}\right)} \cdot \cos\left(\frac{5°+355°}{2}\right)$$

$$M = \frac{\operatorname{sen}\frac{355°}{2}}{\operatorname{sen}\frac{5°}{2}} \cdot \cos 180° \quad \ldots (I)$$

Como: $\frac{355°}{2} + \frac{5°}{2} = 180° \Rightarrow \operatorname{sen}\frac{355°}{2} = \operatorname{sen}\frac{5°}{2}$

Además: $\cos 180° = -1$

En (I) $\therefore M = -1$

**PROPIEDAD**

$$\cos\frac{\pi}{2n+1} + \cos\frac{3\pi}{2n+1} + \cos\frac{5\pi}{2n+1} \ldots + \cos\frac{(2n-1)\pi}{2n+1} = \frac{1}{2}$$

$$\cos\frac{2\pi}{2n+1} + \cos\frac{4\pi}{2n+1} + \cos\frac{6\pi}{2n+1} \ldots + \cos\frac{2n\pi}{2n+1} = -\frac{1}{2}$$

Para el caso de una productoria, debemos tener presente las siguientes expresiones:

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{2n+1} \operatorname{sen}\frac{2\pi}{2n+1} \operatorname{sen}\frac{3\pi}{2n+1} \ldots \operatorname{sen}\frac{n\pi}{2n+1} = \frac{\sqrt{2n+1}}{2^n}$$

$$\cos\frac{\pi}{2n+1} \cos\frac{2\pi}{2n+1} \cos\frac{3\pi}{2n+1} \ldots \cos\frac{n\pi}{2n+1} = \frac{1}{2^n}$$

$$\tan\frac{\pi}{2n+1} \tan\frac{2\pi}{2n+1} \tan\frac{3\pi}{2n+1} \ldots \tan\frac{n\pi}{2n+1} = \sqrt{2n+1}$$

*Ejemplos*:

- $\operatorname{sen}\frac{\pi}{5}\operatorname{sen}\frac{2\pi}{5}=\frac{\sqrt{5}}{4}$

- $\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{3\pi}{7}=\frac{1}{8}$

- $\tan\frac{\pi}{9}\tan\frac{2\pi}{9}\tan\frac{3\pi}{9}\tan\frac{4\pi}{9}=3$

*Ejercicio*:

Halle la suma de n términos de la siguiente serie:

$S=\cos\alpha-\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha+2\beta)-\cos(\alpha+3\beta)+\ldots$

*Resolución*:

Como esta serie tiene n términos, ésta es igual a:

$S=\cos\alpha+\cos(\alpha+\beta+\pi)+\cos(\alpha+2\beta+2\pi)$
$+\cos(\alpha+3\beta+3\pi)+\ldots\ldots+\cos(\alpha+(n-1)(\beta+\pi))$

Observa, que en esta serie la diferencia común de los ángulos es $\beta+\pi$, luego:

$$S=\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\beta+\pi}{2}\right)n}{\operatorname{sen}\left(\frac{\beta+\pi}{2}\right)}\cdot\cos\left\{\alpha+\frac{(n-1)(\beta+\pi)}{2}\right\}$$

$$\therefore\quad S=\sec\frac{\beta}{2}\operatorname{sen}\frac{n(\beta+\pi)}{2}\cos\left\{\alpha+\frac{(n-1)(\beta+\pi)}{2}\right\}$$

# PROBLEMAS

**1.** Calcule A +B siendo

$$A=\sum_{k=1}^{18}\operatorname{sen}^4\left(\frac{5\pi k-3\pi}{180}\right)$$

$$B=\sum_{k=1}^{18}\operatorname{sen}^4\left(\frac{5\pi k-2\pi}{180}\right)$$

A) $\frac{23}{2}$ B) $\frac{21}{2}$ C) $\frac{27}{2}$
D) $\frac{29}{2}$ E) $\frac{25}{2}$

**2.** Factorice trigonométricamente

$P=\sqrt{6}-\sqrt{5}+\sqrt{2}+1$

A) 8 cos 64° 30' sen61° 30'
B) 8 sen 28° 30' sen48° 30'
C) 8 sen64° 30' sen28° 30'
D) 8 cos 64° 30' cos61° 30'
E) 8 sen 28° 30' sen43° 30'

**3.** Definimos

$u_n=\cos^n\theta+\operatorname{sen}^n\theta$

calcule

$6u_{10}-15u_8+10u_6$

A) 2 B) –2 C) –4
D) –1 E) 1

**4.** Si se cumple

$\cos\theta-\sec\theta=m^{-1}$

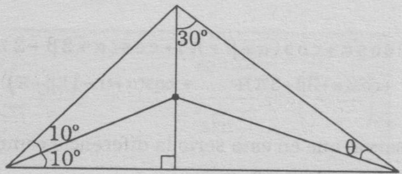
$\csc\phi-\operatorname{sen}\phi=n$

Reduzca la expresión

$k=m\tan\theta+\csc\theta+n\sec\phi-\cot\phi$

A) m+n B) m–n C) mn
D) 1 E) 0

**5.** Calcule $\theta$ a partir del siguiente gráfico.




A) 10° B) 15° C) 20°
D) 30° E) 40°

**6.** Reduzca

$L = \cos^3 1° + \cos^3 3° + \cos^3 5° + \ldots + \cos^3 59°$

A) $3\sqrt{3}\csc 1°$ B) $3\sqrt{3}\csc 2°$
C) $3\sqrt{3}\csc 3°$
D) $\dfrac{3\sqrt{3}}{16}\csc 1°$ E) $\dfrac{3\sqrt{3}}{16}\csc 2°$

**7.** Elimine $\theta$ y $\phi$ de las ecuaciones

$\tan\theta + \tan\phi = a$
$\cot\theta + \cot\phi = b$
$\theta - \phi = \beta$

I. $ab(ab+4) = (a-b)^2\csc^2\beta$
II. $ab(ab-4) = (a+b)^2\sec^2\beta$
III. $ab(ab-4) = (a-b)^2\cot^2\beta$
IV. $ab(ab+4) = (a-b)^2\tan^2\beta$
V. $ab(ab-4) = (a+b)^2\tan^2\beta$

**8.** Si se cumple $\dfrac{\sec\theta - 1}{\tan\theta + \sec\theta} = u^2$ ; $\theta \in IC$

entonces el equivalente de $\sec\theta - \tan\theta$ será :

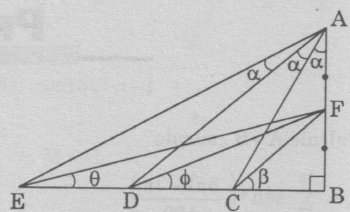
A) $\sqrt{2u}+1$ B) $\sqrt{2}u-1$ C) $2u-1$
D) $2u+1$ E) $1-\sqrt{2}u$

**9.** Sabiendo que: $a\tan x + b\cot y = 0$ simplifique

$$V = \frac{\sec^2 y}{a\tan^2 y + b} + \frac{\sec^2 x}{a\tan^2 x + b}$$

A) $\dfrac{ab}{a-b}$ B) $\dfrac{a+b}{a-b}$ C) $\dfrac{a+1}{a-1}$
D) $\dfrac{a+b}{ab}$ E) $\dfrac{a-1}{b-1}$

**10.** Calcule en término de $\alpha$ el equivalente de la expresión $k = \dfrac{\cot\theta - \cot\phi - \cot\beta}{\cot\phi}$



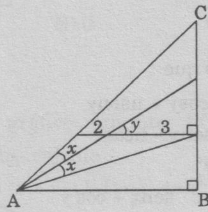

A) $\tan\alpha\tan 3\alpha$
B) $\cot\alpha\cot 3\alpha$
C) $\cot\alpha\tan 3\alpha$
D) $\tan\alpha\cot 3\alpha$
E) $\tan 2\alpha\tan 3\alpha$

**11.** Elimine la variable angular $x$ a partir de

$\csc^2 x + \text{sen}^2 x = a\cos^2 x$
$2\sec^2 x - \cos^2 x = b\,\text{sen}^2 x$

A) $a-b=2$
B) $a+b=2$
C) $a-b=-2$
D) $a+b=1$
E) $a-b=1$

**12.** Del gráfico adjunto, calcule tan$x$ cot$y$




A) 2/3 B) 3 C) 5
D) 1/3 E) 1/5

**13.** Sabiendo que se verifica la igualdad

$$\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{49\pi}{2}-\theta\right)\csc\left(\frac{103\pi}{2}+\theta\right)}{\sec\left(\theta-\frac{51\pi}{2}\right)\cos\left(\frac{23\pi}{2}+\theta\right)\cot(\theta-2004\pi)}=\cot\left(\frac{143^\circ}{2}\right)$$

Además $\theta\in\left\langle-\frac{3\pi}{2};-\pi\right\rangle$ ; halle $\theta$

A) $-\pi-\operatorname{arc\,cot}(3)$
B) $-\pi-\operatorname{arc\,tan}(3)$
C) $-\pi-\operatorname{arc\,cos}(3)$
D) $-\frac{5\pi}{4}$
E) $-\pi+\operatorname{arc\,cot}(3)$

**14.** Analice la veracidad de las proposiciones siendo $n\in\mathbb{Z}$

*i* ) $\operatorname{sen}(n\pi+\theta)=\operatorname{sen}\theta$

*ii* ) $\tan\frac{2\pi}{3}=\tan\left(\frac{3\pi}{2}-\frac{5\pi}{6}\right)=\cot\frac{5\pi}{6}$

*iii* ) $\sec(781\pi-\cos\theta)=-\sec(\cos\theta)$

*iv* ) $\cot\left(3n\pi-\frac{1}{x}\right)=\cot\left(\frac{1}{x}\right)$

A) FVVV B) FVVF C) FFFF
D) VFVF E) FFVF

**15.** Siendo $\cot\alpha-\operatorname{vers}\alpha=0$
calcule $M=\tan^2\alpha-\csc\alpha-1$

A) $\sqrt{2}$ B) 2 C) 1
D) 2 E) 3

**16.** Simplifique

$$M=\frac{\operatorname{sen}3130^\circ\tan2860^\circ\cos3550^\circ\cot3280^\circ}{\cos2630^\circ\operatorname{sen}2290^\circ\operatorname{sen}1710^\circ\sec2400^\circ}$$

A) $-2$ B) $-\frac{1}{2}$ C) $-1$
D) 1 E) 0

**17.** Si $\alpha$ y $\theta$ son dos valores distintos que satisfacen la ecuación de constantes a, b y c: $a\operatorname{sen}x+b\cos x=c$
halle $\operatorname{sen}\alpha+\cos\alpha+\operatorname{sen}\theta+\cos\theta$

A) $\frac{2c(a-b)}{a^2+b^2}$ B) $\frac{2a(a+b)}{b^2+c^2}$

C) $\frac{-2c(a+b)}{a^2+b^2}$

D) $\frac{2c}{a^2+b^2}$ E) $\frac{2c(a+b)}{a^2+b^2}$

**18.** Reducir la expresión siendo $\alpha\wedge\beta$ suplementarios, además $n\in\mathbb{Z}$

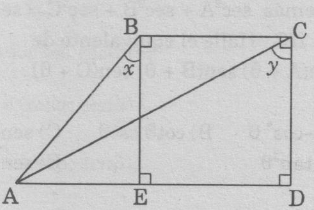
$$A=\frac{\cos\left(\frac{n\beta+3n\alpha}{2}\right)\cot\left(\frac{n\alpha+3n\beta}{2}\right)}{\tan(3\beta n+2n\alpha)\operatorname{sen}(2n\alpha+n\beta)}$$

A) $-1$ B) 3 C) $-2$
D) 1 E) 2

Calcule $A \mp B$

A) 2 B) 0 C) 1
D) $-2$ E) $-1$

**27.** En el gráfico adjunto BCDE es un cuadrado, calcule
$M = \tan(x+y)(1-\tan x-\tan^2 x)-2\tan x$




A) 3 B) 2 C) 1
D) $-1$ E) $-2$

**28.** Simplifique

$$M=\frac{\operatorname{sen}(41\pi+\theta)\operatorname{sen}\left(\frac{5\pi}{4}+\theta\right)\tan(206\pi+\theta)}{\cos\left(\frac{19\pi}{2}-\theta\right)\operatorname{sen}(5\pi+\theta)\tan\left(\frac{45\pi}{2}+\theta\right)}$$

Si $\cos\theta - 2\operatorname{sen}\theta = \csc(4k+1)\frac{\pi}{2}-\sec 2k\pi$

A) $-\frac{3\sqrt{2}}{8}$ B) $-\frac{1}{4}$ C) $-\frac{1}{2}$

D) $\frac{1}{2}$ E) $\frac{1}{3}$

**29.** Si se verifica $\tan x = \dfrac{\operatorname{sena}\operatorname{senb}}{\operatorname{vers}a-\operatorname{vers}b}$

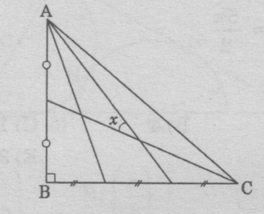
además $0 < b < x < a < \dfrac{\pi}{2}$

halle el equivalente de

$k = \dfrac{\operatorname{sena}\operatorname{sen}x}{\cos a+\cos x}$

A) tanb B) secb C) senb
D) cotb E) cosb

**30.** Del gráfico, determine el máximo valor de $\tan x$




A) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{3}{4}$

D) $\frac{4}{3}$ E) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

**31.** Cuál es la relación que existe entre las variables $x$ e $y$.

$$\tan\left(\frac{40\pi+x}{10}\right)+\cot\left(\frac{15\pi+4x-2y}{10}\right)=\cos\left(\frac{89\pi}{2}\right)$$

siendo $(k \in \mathbb{Z})$

A) $y = 3x$
B) $2y = 3x$
C) $2y - 3x = 2k\pi$
D) $y = 3x + k\pi$
E) $2y - 3x = k\pi$

**32.** Elimine $\theta$ y $\phi$, si
$x\cos(\theta-\phi) + y\operatorname{sen}(\theta-\phi) = 2a$
$x\cos(\theta+\phi) + y\operatorname{sen}(\theta+\phi) = 4a$
$x\cos\theta + y\operatorname{sen}\theta = 2\sqrt{3}a$

A) $2x^2 + y^2 = 16a^2$
B) $x^2 + y^2 = 18a^2$
C) $2x^2 + y^2 = 12a^2$
D) $x^2 + y^2 = 16a^2$
E) $x^2 + y^2 = 12a^2$

**33.** Se define

$$M(x;y)=\left(1+\tan\frac{x}{2}\right)\left(1+\tan\frac{y}{2}\right)$$

calcule $M(\alpha;\beta)+M(\theta;\gamma)$

siendo $\alpha$ y $\beta$ complementarios

$$\theta+\gamma=\frac{5\pi}{2}$$

A) 5  B) 4  C) 1
D) 2  E) 3

**34.** Calcule (aproximadamente) el valor de

$$k=\frac{\text{sen}139°+\text{sen}20°}{2\cos 86°+\cos 4°}$$

A) $\frac{27}{25}$  B) $\frac{22}{25}$  C) $\frac{29}{22}$
D) $\frac{25}{22}$  E) $\frac{22}{16}$

**35.** Dado cota, cotb, cotc están en progresión aritmética y

cot (a+c) = m

calcule $P=\frac{\cos(a-c)}{\text{sen}(a+c)}-\tan b$

A) 0  B) m  C) –m
D) 1/m  E) –1/m

**36.** Reduzca

$$R=\frac{2+\text{exsec}(165°-x)\text{sen}(105°-x)}{1-\tan(255°-x)+\cot(1095°+x)}$$

A) sen $(x-15°)$
B) cos $(x+5°)$
C) ver $(x-15°)$
D) covs $(x+15°)$
E) sec $(x-15°)$

**37.** Si $A+B+C=n\pi$ ; $n\in\mathbb{Z}$

$$M=\frac{\tan(An+Bn+C)\tan(An+Cn+B)\tan(A+nB+nC)}{\tan(A+B+nC)+\tan(A+Bn+C)+\tan(An+B+C)}$$

A) 1  B) 0  C) 2
D) –2  E) –1

**38.** Si $A+B+C=\frac{\pi}{2}$; $\tan A+\tan B+\tan C>0$

Además $\sec^2A+\sec^2B+\sec^2C=\sec^2\theta$ ; $\theta\in$ IIC. Halle el equivalente de sen$(A+\theta)$ sen$(B+\theta)$ sen$(C+\theta)$

A) $-\cos^3\theta$  B) $\cot\theta\csc\theta$  C) $\text{sen}^3\theta$
D) $\tan^3\theta$  E) sen $\theta\cos\theta$

**39.** Reduzca

$k=(\sec 2x+1)(\sec 4x+1)(\sec 8x+1)\ldots$
$\ldots(\sec 32x+1)$

A) tan $8x$ cot$x$
B) tan $64x$ cot$x$
C) tan$6x$ tan$x$
D) tan$32x$ cot $x$
E) tan $16x$ cot $x$

**40.** Reduzca

$$M=\frac{\text{sena}}{\text{sen}(a-b)\text{sen}(a-c)}+\frac{\text{senb}}{\text{sen}(b-c)\text{sen}(b-a)}+\frac{\text{senc}}{\text{sen}(c-a)\text{sen}(c-b)}$$

A) $\frac{3}{2}$  B) $-\frac{3}{2}$  C) –3
D) 0  E) 3

**41.** Calcule $\cot x+\cot y+\cot z$

sabiendo que

$\sec(x+y+z)=\sec x\sec y\sec z$

A) 1  B) –1  C) 0
D) 2  E) –2

**49.** Siendo $\sec(6x-2y)-\left|\tan(2n+1)\frac{\pi}{4}\right|=0$

reduzca

$$A=\frac{\cot\left[\left(\tan^2\frac{\pi}{3}\right)n\pi+3x\right]\cos\left[\left(\operatorname{sen}\frac{7\pi}{2}\right)n\pi+3\frac{x}{2}\right]}{\cot\left[\left(\sec\frac{\pi}{3}\right)n\pi-y\right]\operatorname{sen}\left[\left(\sec^2\frac{3\pi}{4}\right)n\pi+\frac{y}{2}\right]}$$

donde $n\in\mathbb{Z}$

A) $\pm 1$ B) 2 C) 1
D) $-2$ E) $-1$

**50.** Sabiendo que $\cos 4\theta=\cos^2\theta$

calcule el valor entero de $\cos\theta$

A) $\sqrt{2}$ B) $-1$ C) $\pm 1$
D) 0 E) 1

**51.** Determine los valores de

$$N=\frac{\cot\left(\frac{41\pi}{2}+\theta\right)\sec(5\pi-\theta)\tan\left(\frac{15\pi}{2}-\theta\right)}{\cos(\theta-2003\pi)\csc(7\pi+\theta)\operatorname{sen}(\theta-12\pi)}$$

A) $\langle 3;\infty\rangle$ B) $\langle 2;\infty\rangle$ C) $\langle 1;\infty\rangle$
D) $[1;\infty\rangle$ E) $\langle 0;\infty\rangle$

**52.** Si $a>0 \wedge b>0$

además $\frac{1-\operatorname{sen}x}{1+\cos x}=a$

$(\csc x-\cot x+1)^2=2b$ ; $x\in$ IC

Encontrar una relación entre a y b.

A) $\sqrt{ab}=1$
B) $\sqrt{a}-\sqrt{b}=\sqrt{2}$
C) $\sqrt{a}+\sqrt{b}=\sqrt{2}$
D) $\sqrt{a}+\sqrt{b}=2$
E) $\sqrt{b}-\sqrt{a}=\sqrt{2}$

**53.** De la igualdad

$$a\tan(x-y)+b\tan(x+y)=\frac{(a+b)\cot y-(a-b)\cot x}{\cot x\cot y-\tan x\tan y}$$

halle $\tan x\cot y$ en términos de a y b

A) $\frac{a-b}{a+b}$ B) $\frac{a}{b}$ C) $a+b$
D) $\frac{a+b}{a-b}$ E) $a-b$

**54.** Reduzca

$$M=\frac{\tan a+\tan b}{1+\cos(a+b)}\times\frac{1}{\sec a\csc b\tan\left(\frac{a+b}{2}\right)}$$

A) $\tan b$ B) $\cot a$ C) $\tan^2 b$
D) $\tan a$ E) $\tan^2 a$

**55.** Simplifique

$$\operatorname{sen}\theta\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta}}+\cos\theta\sqrt{\frac{1+\operatorname{sen}\theta}{1-\operatorname{sen}\theta}}+F$$

Si $F=-\cos\theta+\frac{1}{2}\sqrt{7-4\sqrt{3}}-3$; $\theta\in\langle 0°;90°\rangle$

A) $2\operatorname{sen}\left(\frac{\theta-15°}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta-15°}{2}\right)$

B) $2\cos\left(\frac{\theta-60°}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta+60°}{2}\right)$

C) $2\operatorname{sen}\left(\frac{\theta-30°}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\theta+30°}{2}\right)$

D) $2\operatorname{sen}\left(\frac{\theta-60°}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta+60°}{2}\right)$

E) $2\operatorname{sen}\left(\frac{\theta+60°}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta-60°}{2}\right)$

**56.** Siendo a $\wedge$ c suplemetarios además a $\wedge$ b son complementarios reduzca

$$M=\frac{4\cos(2a+3c)\csc(4b-3c)}{\tan(a+b+c)}-\frac{\text{sen}(a-b+c)}{\text{sen}(a+b-c)}$$

A) 0 B) –1 C) –2
D) 2 E) –3

**57.** Sea el triángulo ABC tal que AB = AC, BC = $\sqrt{2}$. Si la bisectriz del ángulo B corta al lado opuesto en D; BD = 1
Entonces cos (A – B) será

A) 0 B) $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ C) $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$
D) –1 E) 1

**58.** Si sen77° + cos83° = n
encontrar el equivalente de
k = sen66° + sen44° + sen40° – cos60°

A) 1,2 n B) 1,8 n C) 0,5 n
D) 1,6 n E) n

**59.** Siendo a, b $\in \mathbb{R}^+$; halle el intervalo de f(θ) = a cov θ + bvers θ , cuando θ sea un arco del segundo cuadrante

A) $\langle$b; 2b+a] B) $\langle$b; 2b + a$\rangle$ C) $\langle$a; b$\rangle$
D) $\langle$a–b; b$\rangle$ E) [b; a]

**60.** Calcule el valor de

$$N=\frac{\tan\frac{143\pi}{6}}{\text{sen}\frac{109\pi}{3}+\sec\frac{253\pi}{6}}+\cos(2k-1)\frac{\pi}{2};\ k\in\mathbb{Z}$$

A) $\frac{2\sqrt{3}}{15}$ B) $\frac{2\sqrt{3}}{21}$ C) $-\frac{2}{7}$
D) $\frac{2}{7}$ E) $-\frac{2\sqrt{3}}{21}$

**61.** Siendo β suplementario y coterminal con θ y ϕ respectivamente. Calcule la diferencia entre el mayor y menor valor de

$$R=\frac{\cos\beta\sec\left(\frac{3\pi}{2}+\theta\right)\cos^n(\beta-\phi+n\pi)}{4\cot\beta+(-1)^n\tan(270°+\theta)};\ n\in\mathbb{Z}$$

A) $\frac{8}{15}$ B) $-\frac{2}{15}$ C) $-\frac{8}{15}$
D) $\frac{2}{15}$ E) $\frac{8}{5}$

**62.** Calcule tan7° 30'

A) $\sqrt{7}+\sqrt{3}+2$
B) $\sqrt{6}-\sqrt{3}$
C) $\sqrt{6}+\sqrt{3}+\sqrt{2}+2$
D) $\sqrt{6}+\sqrt{3}+\sqrt{2}-2$
E) $\sqrt{6}-\sqrt{3}+\sqrt{2}-2$

**63.** Si $\sec(x+y)=\frac{\sqrt{34}}{5}$; $\csc(z+w)=\frac{\sqrt{85}}{6}$

determine

$$E=\frac{7\tan w+7\tan z+6\tan w\tan z}{5\tan x+5\tan y+3\tan y\tan x}$$

A) 5 B) 4 C) 1
D) 2 E) 3

**64.** Calcule el valor numérico de la expresión

$$\left(\frac{1}{4}+\cos\frac{\pi}{9}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{4}-\text{sen}\frac{\pi}{9}\right)$$

B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ D) $-\sqrt{3}$
E) $\sqrt{3}$ A) $-\frac{1}{2}$

**65.** Si se cumple

$27\cot^2x\cot^2y\cot^2z+1=6\sqrt{3}\cot x\cot y\cot z$

calcule

$$k=\left(\frac{\tan x\tan y-\tan x\cot z-\tan y\cot z}{\tan x+\tan y+\tan z}\right)^{-1}$$

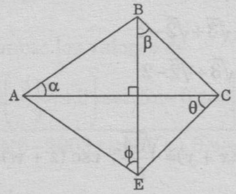
A) $3\sqrt{3}$ B) $2\sqrt{5}$ C) $2\sqrt{3}$
D) $\sqrt{3}$ E) $\sqrt{5}$

**66.** Calcule el valor de

$$Z=\sec^2\frac{11\pi}{12}+\sec^2\frac{7\pi}{12}+\sec^2\frac{19\pi}{12}+\sec^2\frac{13\pi}{12}$$

A) 2 B) 32 C) 64
D) 8 E) 16

**67.** En el gráfico




$\alpha+\beta+\theta=180°$

señale el equivalente de

$$\frac{\cos(\phi+\alpha)\cos(\phi+\beta)\cos(\phi+\theta)}{\cos\phi}$$

A) $\text{sen}^2\phi$ B) $\tan^2\phi$ C) $\text{sen}\phi$
D) $\text{sen}^3\phi$ E) $\tan\phi$

**68.** De las condiciones

$$\frac{\text{sen}(b+x)}{\text{sen}(a+x)}=\frac{\text{sen}(b-x)}{\text{sen}(a-x)}=\frac{\text{sen}b\,\text{sen}x}{\cos a}$$

calcule $\text{sen}^2x-\cot^2a$

A) $-1$ B) 1 C) 0
D) 2 E) $\frac{1}{2}$

**69.** Calcule la suma de los n primeros términos.

$$R=\frac{\text{sen}^3\theta}{\cos3\theta}+\frac{\text{sen}^33\theta}{3\cos9\theta}+\frac{\text{sen}^39\theta}{9\cos27\theta}+\ldots$$

A) $\frac{3}{8}(3^n\tan3^n\theta-\tan\theta)$

B) $\frac{1}{8}(\tan3^{n-1}\theta-\tan\theta)$

C) $\frac{3}{8}(3^{-n}\tan3^n\theta-\tan\theta)$

D) $\frac{1}{4}(\tan3^n\theta-3^{-n}\tan\theta)$

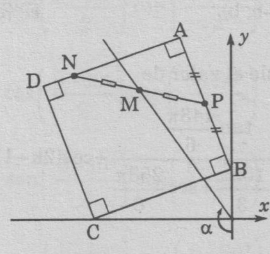
E) $\frac{1}{4}(\tan3^n\theta-\tan\theta)$

**70.** Si $\sec(a+b)+\sec(a-b)=k$

simplifique $E=\dfrac{\cos a\cos b}{\text{sen}^2a+\text{sen}^2b-1}$

A) $-\frac{k}{2}$ B) 1 C) k
D) $-k$ E) $\frac{k}{2}$

**71.** Siendo ABCD un cuadrado; $AC=\sqrt{10}$; $AN=2ND$; $B=(0;1)$. Calcule $\tan\alpha$




A) $\frac{11}{26}$ B) $\frac{17}{26}$ C) $-\frac{26}{17}$
D) $\frac{26}{17}$ E) $\frac{3}{11}$

**114.** Si

$\cos 2\theta(\text{sen}^4 3\theta+2\cos 3\theta+\text{sen}30°\text{sen}^2 6\theta+\cos^4 3\theta)$
$= A\cos 2\theta + B\cos 5\theta + C\cos\theta$

Calcule A+B +C

A) 3 B) 4 C) 2
D) 5 E) 1

**115.** Reduzca

$M= 64\cos^7 x -112\cos^5 x +60\cos^3 x -10\cos x$
$-2\cos 2x\cos 5x$

A) 2 B) 3 C) 4
D) 0 E) 1

**116.** Calcule la suma de los n primeros términos

$$P=\frac{1-\cos 2\alpha}{\cos 3\alpha}+\frac{1-\cos 6\alpha}{\cos 9\alpha}+\frac{1-\cos 18\alpha}{\cos 27\alpha}+...$$

A) $\frac{1}{2}(\cos 3^n\alpha-\sec\alpha)$

B) $\frac{1}{2}(\sec 3^{n+1}\alpha-\sec\alpha)$

C) $\frac{1}{2}(\csc 3^n\alpha-\csc\alpha)$

D) $\frac{1}{2}(\sec 3^n\alpha-\sec\alpha)$

E) $\frac{1}{2}(\sec 3^{n-1}\alpha-\sec\alpha)$

**117.** Si $\alpha\in\left\langle\frac{\pi}{2};\pi\right\rangle$

calcule $M=2\sqrt{6}\tan\alpha+\cos\theta$

a partir de

$5(\text{sen}^2\alpha+\cos^2\theta)+6\cos\theta=2(\text{sen}\alpha-1)$

A) $\frac{2}{5}$ B) $-\frac{8}{5}$ C) $\frac{1}{5}$
D) $-\frac{2}{5}$ E) $-\frac{4}{5}$

**118.** Calcule el valor de

$$R=\sqrt{2}\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{3\pi}{7}\left(\sqrt{2}\text{sen}\frac{3\pi}{7}-\text{sen}\frac{3\pi}{28}\right)$$

A) $\frac{\sqrt{7}-1}{8}$ B) $\frac{\sqrt{7}}{8}$ C) $\frac{1}{8}$
D) $\frac{\sqrt{2}+1}{8}$ E) $\sqrt{7}$

**119.** Siendo $A=\frac{\sqrt{5}+1}{4}$

además

$$\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2-2A}}}}=2\cos(\pi\theta^{-1})$$

además $|\theta|<90$. Calcule $\theta$

A) ± 80 B) –80 C) 40
D) 80 E) 60

**120.** Sabiendo que

$\text{sen}x+\text{sen}y=a$
$\cos x-\cos y=b$

calcule

$$L=\frac{1+a\,\text{sen}(x-y)-\cos(x-y)}{a+\text{sen}(x-y)+a\cos(x-y)}$$

A) $\frac{a}{b}$ B) a+b C) ab
D) $\frac{b}{a}+1$ E) $-\frac{b}{a}$

**121.** Calcule

$\cos(\alpha+\beta)\text{sen}(\alpha-\beta)+\cos(\beta+\gamma)\text{sen}(\beta-\gamma)$
$+\cos(\gamma+\delta)\text{sen}(\gamma-\delta)+\cos(\delta+\alpha)\text{sen}(\delta-\alpha)$

A) 0 B) 2 C) –2
D) 6 E) 4

**132.** Si se cumple

$(1-\cos\alpha)(1+\operatorname{sen}\beta)(1-\cos\delta)=\operatorname{sen}\alpha \times \cos\beta\ \operatorname{sen}\delta$

reduzca

$E=(1+\cos\alpha)(1+\cos\delta)(1-\operatorname{sen}\beta)\csc\alpha\ \sec\beta$

A) $\operatorname{sen}\alpha$ B) $\cos\beta$ C) $\cos\delta$

D) $\cos\alpha$ E) $\operatorname{sen}\delta$

**133.** Calcule $A^B$, si se verifica la igualdad

$$2\operatorname{sen}\frac{10\pi}{11}-\tan\frac{9\pi}{11}=A\left(\operatorname{sen}\frac{8\pi}{11}\operatorname{sen}\frac{7\pi}{11}\right)^B$$

A) $\frac{2\sqrt{11}}{11}$ B) $\frac{\sqrt{11}}{33}$ C) $\frac{4\sqrt{11}}{11}$

D) $\frac{\sqrt{11}}{22}$ E) $4\sqrt{11}$

**134.** Simplifique

$$P=\frac{\sec^2 x\sec 2x}{1+\cot^2 3x}(\cot^2 x-\cot^2 3x)$$

A) 4 B) 6 C) 10

D) 8 E) 2

**135.** Si $A+B+C=\pi$

Reduzca

$L=(\cot B+\cot C)(\cot C+\cot A)(\cot A+\cot B)$

A) $\tan A\tan B\tan C$

B) $\sec A\sec B\sec C$

C) $\csc A\csc B\csc C$

D) $\operatorname{sen}A\operatorname{sen}B\operatorname{sen}C$

E) $\cos A\cos B\cos C$

**136.** Siendo

$$A_n=\prod_{k=1}^{n}(3\cos 2^{k-1}\alpha+\cos 3.2^{k-1}\alpha)$$

Halle el equivalente de $B=\sqrt[3]{\dfrac{A_{n-1}}{4A_{n+1}}}$

A) $4\sec 2^{n-1}\alpha\sec 2\alpha$

B) $\frac{1}{4}\sec 2^{n-1}\alpha$

C) $\frac{1}{4}\sec^{n+1}\alpha\sec 2^n\alpha$

D) $\frac{1}{4}\sec 2^n\alpha$

E) $\frac{1}{4}\sec 2^{n-1}\alpha\sec\alpha$

**137.** Si $\cot\theta-\tan\theta=-3$

calcule $Z=\dfrac{\sec^2\theta+\csc^2\theta}{\tan\theta-\cot\theta}$

A) $\frac{9}{5}\sqrt{5}$ B) $-\frac{9\sqrt{5}}{5}$ C) $3\sqrt{5}+\frac{1}{44}$

D) $\frac{13}{3}$ E) $-3\sqrt{3}$

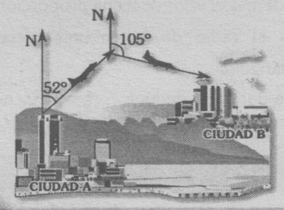
**138.** Sabiendo que se cumple $\operatorname{sen}^2\theta-1=\tan\theta$

calcule $M=\cos^2\theta+\cos^6\theta$

A) $-16$ B) $-32$ C) 0

D) 1 E) $-4$

# Resolución de Triángulos Oblicuángulos




**CAPÍTULO VII**

## Objetivos

*Al finalizar el presente capítulo, el alumno estará en la capacidad de:*

- *Enunciar y aplicar las leyes trigonométricas en la resolución de triángulos.*
- *Analizar y resolver diversos problemas de resolución de triángulos oblicuángulos aplicando los teoremas correspondientes.*

## Introducción

*La resolución de problemas sobre triángulos ha cambiado en los últimos años. Tradicionalmente se ha utilizado un gran número de métodos numéricos y numerosas fórmulas, sin embargo, ha adquirido mayor importancia la parte analítica de la trigonometría con sus aplicaciones a las matemáticas superiores y la ciencia en general. Los nuevos desarrollos han dado origen a métodos gráficos de gran exactitud y han hecho posible la utilización de calculadoras numéricas.*

*Para resolver problemas de triángulos oblicuángulos utilizaremos algunos teoremas, antes de enunciar dichos teoremas, recordemos que resolver un triángulo implica determinar sus elementos básicos, es decir, sus lados y ángulos para ello debemos conocer tres elementos de donde por lo menos uno de ellos debe ser la longitud.*

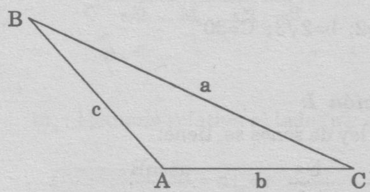
## Teoremas

### TEOREMAS DE LOS SENOS (Ley de Senos)

En todo triángulo, la longitud de los lados son proporcionales a los senos de sus ángulos opuestos.

De la figura:

$$\boxed{\frac{a}{senA}=\frac{b}{senB}=\frac{c}{senC}}$$



**Nota**

Además el valor de dicha proporción es 2R, donde R es el radio de la circunferencia circunscrita al triángulo.

De donde se deduce: $a = 2R\text{sen}A$

$b = 2R\text{sen}B$

$c = 2R\text{sen}C$

## TEOREMAS DE LOS COSENOS (Ley de Coseno )

El cuadrado la longitud de un lado es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de los otros dos lados menos el doble producto de dichas longitudes multiplicado por el coseno del ángulo que formen dichos lados.

| |
|---|
| $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$ |
| $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$ |
| $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$ |

**Nota**

De las expresiones anteriores podemos despejar:

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

Análogo para los otros ángulos.

**Aplicaciones**:

Resolver el triángulo ABC, si:

I. $A=60°$; $B=45°$; $a=4$

II. $a=2$; $b=2\sqrt{3}$; $C=30°$

***Solución I:***

De la ley de senos se tiene:

$$\frac{a}{\text{sen}A} = \frac{b}{\text{sen}B} \Rightarrow b = \frac{a\text{sen}B}{\text{sen}A}$$

**Reemplazando valores**:

$$b = \frac{4\text{sen}45°}{\text{sen}60°}$$

$$\therefore\ b = \frac{4\sqrt{6}}{3}$$

Como : $A+B = 105° \Rightarrow C = 75°$

Así mismo: $c = \dfrac{a\text{sen}C}{\text{sen}A}$

entonces: $c = \dfrac{4\text{sen}75°}{\text{sen}60°}$

$$\therefore\ c = \frac{2\sqrt{6} + 6\sqrt{2}}{3}$$

***Solución II:***

De ley de cosenos se tiene:

$c^2 = a^2 + b^2 - 2\ ab\cos C$

$c^2 = 2^2 + (2\sqrt{3})^2 - 2(2)(2\sqrt{3})\cos 30°$

$\therefore\ c=2$

luego el triángulo es isósceles

$\therefore\ A=30°$ y $B=120°$

## TEOREMA DE TANGENTES (Ley de tangente)

Dado un triángulo ABC se cumple:

$$\frac{a-b}{a+b} = \frac{\tan\left(\dfrac{A-B}{2}\right)}{\tan\left(\dfrac{A+B}{2}\right)}$$

De igual forma para los otros lados.

$$\frac{a-c}{a+c} = \frac{\tan\left(\dfrac{A-C}{2}\right)}{\tan\left(\dfrac{A+C}{2}\right)} \quad ; \quad \frac{b-c}{b+c} = \frac{\tan\left(\dfrac{B-C}{2}\right)}{\tan\left(\dfrac{B+C}{2}\right)}$$

## TEOREMA DE LAS PROYECCIONES (Ley de proyecciones)

Dado un triángulo ABC se cumple:

| |
|---|
| $a = b\cos C + c\cos B$ |
| $b = a\cos C + c\cos A$ |
| $c = a\cos B + b\cos A$ |

## RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE LOS SEMIÁNGULOS DE UN TRIÁNGULO

En todo triángulo ABC, con respecto al ángulo "A" se cumple:

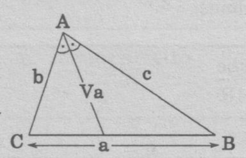
| |
|---|
| $\operatorname{sen}\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}$ |
| $\cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}$ |
| $\tan\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}$ |

Donde: $p = \frac{a+b+c}{2}$ (semiperímetro)

## ELEMENTOS AUXILIARES DE UN TRIÁNGULO

### 1. Bisectriz

**A. Bisectriz Interior**




$V_a$ : Bisectriz interior relativa al lado "a"

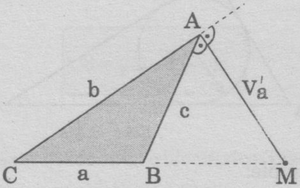
$$V_a = \left(\frac{2bc}{b+c}\right)\cos\frac{A}{2}$$

de igual forma.

$$V_b = \left(\frac{2ac}{a+c}\right).\cos\frac{B}{2}$$

$$V_c = \left(\frac{2ab}{a+b}\right)\cos\frac{C}{2}$$

**B. Bisectriz Exterior**




$V_a'$: Bisectriz exterior relativa al lado "a"

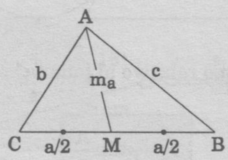
$$V_a' = \left(\frac{2bc}{|b-c|}\right)\operatorname{sen}\frac{A}{2}$$

de igual forma:

$$V_b' = \left(\frac{2ac}{|a-c|}\right)\operatorname{sen}\frac{B}{2},$$

$$V_c' = \left(\frac{2ab}{|a-b|}\right)\operatorname{sen}\frac{C}{2}$$

### 2. Mediana




$m_a$ : Mediana relativa al lado "a"

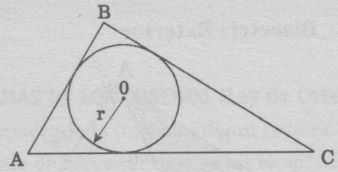
$$4m_a^2 = b^2 + c^2 + 2bc\cos A$$

de igual forma:

$$4m_b^2 = a^2 + c^2 + 2ac\cos B$$

$$4m_c^2 = a^2 + b^2 + 2ab\cos C$$

### 3. Inradío



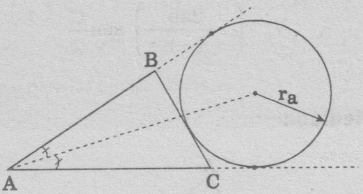

Se cumple:

$$r = (p-a)\tan\frac{A}{2}$$

también:

$$r = (p-b)\tan\frac{B}{2} \qquad r = (p-c)\tan\frac{C}{2}$$

### 4. Exradío




$r_a$ : ex–radio relativo al lado "a"

$$r_a = p\tan\frac{A}{2}$$

de igual forma:

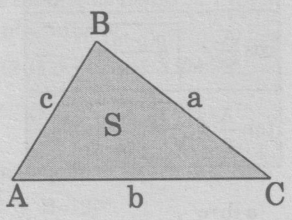
$$r_b = p\tan\frac{B}{2} \quad ; \quad r_c = p\tan\frac{C}{2}$$

### EXPRESIONES DEL PERÍMETRO; INRADIO Y EXRADIOS EN TÉRMINOS DEL CIRCUNRADIO Y LOS TRES ÁNGULOS DEL TRIÁNGULO

| |
|---|
| $p = 4R\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$ |
| $r = 4R\,\mathrm{sen}\frac{A}{2}\,\mathrm{sen}\frac{B}{2}\,\mathrm{sen}\frac{C}{2}$ |
| $r_a = 4R\,\mathrm{sen}\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$ |
| $r_b = 4R\cos\frac{A}{2}\,\mathrm{sen}\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$ |
| $r_c = 4R\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\,\mathrm{sen}\frac{C}{2}$ |

### ÁREA DE UNA REGIÓN TRIANGULAR (S)

Dado el triángulo ABC




Se cumple: $S = \frac{bc}{2}\mathrm{sen}A$

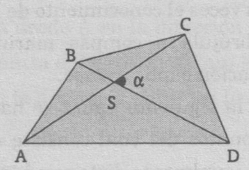
Análogamente: $S = \frac{ac}{2}\mathrm{sen}B$, $S = \frac{ab}{2}\mathrm{sen}C$

Otras relaciones:

| |
|---|
| $S = \frac{abc}{4R}$ |
| $S = p.r$ |
| $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ |
| $S = r_a(p-a) = r_b(p-b) = r_c(p-c)$ |
| $S = 2R^2\mathrm{sen}A\,\mathrm{sen}B\,\mathrm{sen}C$ |
| $S = \sqrt{r\,r_a\,r_b\,r_c}$ |

## ÁREAS DE REGIONES CUADRANGULARES

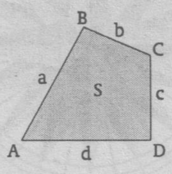
1. En términos de sus diagonales y el ángulo comprendido entre estas.




Se cumple: $S = \frac{d_1 \cdot d_2}{2} \operatorname{sen}\alpha$

Donde:
$d_1$ y $d_2$ : diagonales del cuadrilátero ABCD
$\alpha$ : medida del ángulo formado por las diagonales
(S: área del cuadrilátero ABCD)

2. En términos de sus lados y de sus ángulos opuestos.




Se cumple:

$$S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d) - abcd\cos^2\theta}$$

Donde: p : semiperímetro

$$\left(p = \frac{a+b+c+d}{2}\right)$$

Además: $\theta$ es la semi-suma de dos ángulos opuestos.

$$\theta = \frac{A+C}{2} \quad \vee \quad \theta = \frac{B+D}{2}$$

## CASOS PARTICULARES

a. Para un cuadrilátero inscriptible ($\theta = 90°$)

$$S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$$

b. Para un cuadrilátero circunscriptible (a+c=b+d)

$$S = \sqrt{abcd}\,\operatorname{sen}\theta$$

c. Para un cuadrilátero bicéntrico (inscriptible y circunscriptible a la vez)

$$S = \sqrt{abcd}$$

**Aplicaciones**

- En una máquina de vapor cuyo pistón se mueve horizontalmente, la barra de conexión tiene una longitud de 48cm y la manivela una longitud de 16cm. Determine el valor de sen$\alpha$, siendo $\alpha$ el ángulo formado entre el eje de la manivela y la horizontal, cuando la barra de conexión forma un ángulo de 16° con la horizontal.

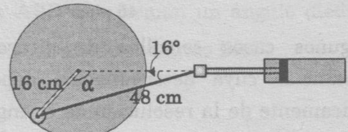



Figura 1

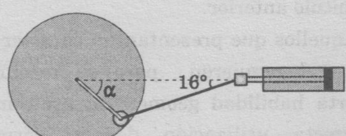



Figura 2

**26.** Los lados de un cuadrilátero son 6,7, 8 y 9u respectivamente; siendo su área de $12\sqrt{21}u^2$, calcule el coseno del ángulo agudo formado por las diagonales.

A) $\frac{1}{15}$ B) $\frac{2}{7}$ C) $\frac{2}{15}$

D) $\frac{5}{12}$ E) $\frac{4}{13}$

**27.** Del triángulo acutángulo ABC "o" ortocentro y siendo $x$, $y$, $z$ las distancias de "0" a los 3 lados . Halle $\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}$

A) 4tanA tanB tanC
B) 5tanA tanB tanC
C) tanA tanB tanC
D) 2tanAtanB tanC
E) 3tanA tanB tanC

**28.** Si p, q, r son las longitudes de las bisectrices de los ángulos de un triángulo ABC. Halle

$$k=\frac{1}{p}\cos\frac{A}{2}+\frac{1}{q}\cos\frac{B}{2}+\frac{1}{r}\cos\frac{C}{2}$$

A) a+b–c B) $\frac{a}{2}+\frac{b}{3}+\frac{c}{5}$ C) a+b+c

D) $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$ E) $a^2+b^2-c^2$

**29.** Reduzca en términos de los lados a, b y c de un triángulo ABC.

$$k=\frac{(\cos B+\cos C)(1+2\cos A)}{1+\cos A-2\cos^2 A}$$

A) $\frac{b-c}{a}$ B) $\frac{a+c}{b}$ C) $\frac{b+c}{a}$

D) a + b – c E) $\frac{a-c}{b}$

**30.** En un triángulo ABC, reduzca

$$L=a+p\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}$$

p: semiperímetro

A) $\frac{p}{4}$ B) 2p C) 3p

D) p E) $\frac{p}{2}$

**31.** En un triángulo ABC, reduzca
$P=a^3\cos(B-C)+b^3\cos(C-A)+c^3\cos(A-B)$

A) 3abc B) abc C) 4abc
D) 5abc E) 2abc

**32.** El semiperímetro de un triángulo mide 30 m y el mayor lado mide 26 m. Si el radio de la circunferencia inscrita en el triángulo mide 4m ¿cuál es la medida del ángulo mayor?

A) 30° B) 45° C) 90°
D) 60° E) 22°30'

**33.** Si P es el semiperímetro de un triángulo ABC, reducir

$$H=\frac{bc\cos^2\frac{A}{2}+ac\cos^2\frac{B}{2}+ab\cos^2\frac{C}{2}}{p^2}$$

A) 4 B) 2 C) 3
D) 1 E) 0

**34.** En un cuadrilátero inscriptible ABCD se sabe que a – c = b – d. Calcule su área en términos de b, c y A

A) bccsc A B) bcotA C) bc secA
D) bctan$\frac{A}{2}$ E) bccot$\frac{A}{2}$

**45.** Dada la siguiente regla de correspondencia

$f(x) = e^{|\cos x+\operatorname{sen}x|} + e^{|\cos x-\operatorname{sen}x|}$

¿Cuál de las siguientes proposiciones son verdaderas?

I. f es par

II. su periodo es $\dfrac{\pi}{2}$

III. su máximo valor es $1+e^{\sqrt{2}}$

A) VVV B) VFF C) FFV
D) VFV E) FVV

**46.** Halle el rango de la función f definida por

$$f(x)=\frac{\operatorname{sen}x(\operatorname{sen}x+\cos x-1)}{\sec x+\tan x(\cos x-1)-1}$$

A) $\langle 1-\sqrt{2};\ \sqrt{2}+1]-\{2\}$
B) $[\sqrt{2};\ \sqrt{2}]-\{0{,}2;\ -1\}$
C) $[1-\sqrt{2};\ \sqrt{2}+1]-\{0{,}2\}$
D) $[1-\sqrt{2};\ \sqrt{2}+1]$
E) $[-2\sqrt{2};\ 2\sqrt{2}]-\{0\}$

**47.** De la condición

$$f(x)=\left(\frac{\tan x+\dfrac{\sqrt{3}}{3}}{\tan x-\tan\dfrac{\pi}{6}}\right)\left(\operatorname{sen}2x-\operatorname{sen}\frac{\pi}{3}\right)$$

Analizar la verdad o falsedad de las siguientes proposiciones

I. $Rf \in [-1;1]$

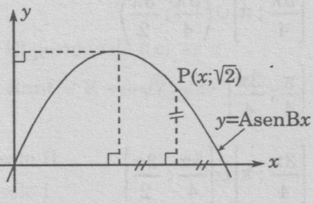
II. $Df \in \mathbb{R}-\left\{k\pi+\dfrac{\pi}{2};\ k\pi+\dfrac{\pi}{6}\right\};\ k\in\mathbb{Z}$

III. Si $x\in\left\langle -\dfrac{\pi}{6};\ \dfrac{\pi}{12}\right\rangle \Rightarrow$ f es creciente

IV. Si $x\in\left\langle \dfrac{\pi}{12};\ \dfrac{\pi}{3}\right\rangle \Rightarrow$ f es decreciente

A) VVFV B) VVVF C) FVVV
D) VVVV E) VFVV

**48.** Del gráfico, calcule $A+\dfrac{\pi}{\sqrt{2}B}$; $A>0$




A) 10 B) 8 C) 7
D) 6 E) 5

**49.** Calcule el área de la región encerrada por las gráficas de las funciones

$f(x)=\dfrac{\cos x+\operatorname{sen}2x}{1+\operatorname{sen}x-\cos 2x}$; $g(x)=1 \wedge h(x)=-1$

para $x\in[0;\pi\rangle$

A) $\pi u^2$ B) $\dfrac{5\pi}{2}u^2$ C) $\dfrac{\pi}{2}u^2$
D) $\dfrac{3\pi}{2}u^2$ E) $2\pi\ u^2$

**50.** Halle el periodo de las siguientes funciones definidas mediante

I. $f(x)=\left|\sec\dfrac{x}{2}\right|+\left|\csc\dfrac{x}{2}\right|$

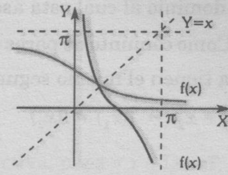
II. $g(x)=\cos 2x\cos 3x$

III. $h(x)=\cos^3\left(\dfrac{\pi x}{4}\right)+\operatorname{sen}^3\left(\dfrac{\pi x}{4}\right)$

IV. $M(x)=|\cot(\cos\pi x)|$

A) π, 2 π, 8, 2
B) 2π,π, 8, 1
C) π, π; 8, 2
D) π, π, 8, 4
E) π, π, 8, 1

# Funciones Trigonométricas Inversas




## CAPÍTULO IX

## Objetivos

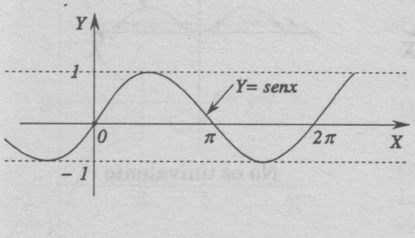
*Al finalizar el presente capítulo, el lector estará en la capacidad de:*

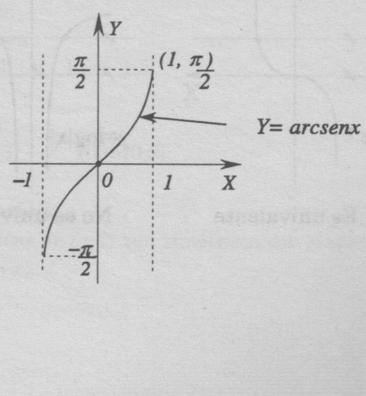
- *Entender el significado de la expresión arcsenx, arccosx, . . . etc*
- *Relacionar la teoría de función, inversa con las funciones trigonométricas inversas fundamentales.*
- *Conocer para qué valores está definida y cuál es el campo de variación del arcsenx, arccosx . . . etc. para aplicarlos en resolución de ecuaciones.*
- *Conocer y la importancia del tema por sus diversas aplicaciones en distintos campos de la ciencia e ingeniería.*

## Introducción

*Para los alumnos preuniversitarios la teoría de funciones trigonométricas inversas parece en muchos casos complicada y se piensa que está desligada de lo que anteriormente ya se ha estudiado, sin embargo, en el desarrollo de la teoría de este tema y en la aplicación a problemas se mostrará que no existe tal dificultad, pues, ya tenemos base de la trigonometría en general; es decir, buscaremos relacionarlos en la definición de un ángulo trigonométrico, circunferencia trigonométrica, identidades, etc.*

*Por ejemplo lograremos entender la diferencia entre la expresión y=senx e y=arcsenx. En el primer caso sabemos que x asume cualquier número real, además* $-1 \le senx \le 1$. *Mientras que en el segundo caso "y es un arco cuyo seno es x"; además se define para* $-1 \le x \le -1$ *y* $-\frac{\pi}{2} \le arsenx \le \frac{\pi}{2}$. *(Véase gráficos)*



**Propiedad IV**

$$\text{arcsen}x + \text{arccos}x = \frac{\pi}{2}; \forall x \in [-1; 1]$$

$$\text{arctan}x + \text{arccot}x = \frac{\pi}{2}; \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\text{arcsec}x + \text{arccsc}x = \frac{\pi}{2}; \forall x \in \mathbb{R} - \langle -1; 1\rangle$$

***Ejemplos:***

- $\text{arcsen}\left(\frac{3}{4}\right) + \text{arccos}\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{\pi}{2}$
- $\text{arctan}(3) + \text{arccot}(3) = \frac{\pi}{2}$
- $\text{arcsec}(150) + \text{arccsc}(150) = \frac{\pi}{2}$
- $\text{arcsen}(2) + \text{arccos}(2) = \frac{\pi}{2}$;

  es absurdo ya que $2 \notin [-1; 1]$

**Propiedad V**

$$\text{arctan}x + \text{arctan}y = \text{arctan}\left(\frac{x+y}{1-xy}\right) + k\pi;$$

Si: $xy < 1 \Rightarrow k = 0$

Si: $xy > 1$ , $x > 0 \Rightarrow k=1$

Si: $xy > 1$ , $x < 0 \Rightarrow k=-1$

***Ejemplos:***

- $\text{arctan}\left(\frac{1}{3}\right) + \text{arctan}\left(\frac{1}{2}\right) = \text{arctan}\left(\frac{\frac{1}{3}+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}}\right)$

  $= \text{arctan}(1)$

  $= \frac{\pi}{4}$

- $\text{arctan}(2) + \text{arctan}(4) = \text{arctan}\left(\frac{2+4}{1-2\times 4}\right) + \pi \quad = \text{arctan}\left(-\frac{6}{7}\right) + \pi$

  $= \pi - \text{arctan}\left(\frac{6}{7}\right)$

- $\text{arctan}(-1) + \text{arctan}(-\sqrt{3}) = \text{arctan}\left(\frac{(-1)+(-\sqrt{3})}{1-(-1)(-\sqrt{3})}\right) - \pi \quad = \text{arctan}\left(\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}\right) - \pi$

  $= \text{arctan}(2+\sqrt{3}) - \pi$

  $= \frac{5\pi}{12} - \pi = \frac{-7\pi}{12}$

# PROBLEMAS

**1.** Calcule el rango de
f(x) = Ln (arc cosx)

A) $\left\langle 0; \frac{1}{2}\text{Ln}\pi \right]$
B) [0; 1]
C) $\langle -\infty; \text{Ln}\pi]$
D) $\langle 0; \text{Ln}\pi \rangle$
E) $\langle -\text{Ln}\pi; \text{Ln}\pi]$

**2.** Si $\text{arc}\sec^2 x - \text{arc}\csc^2 x = \frac{\pi n}{4}$
calcule la suma de valores de [ n ]

A) 15 B) 10 C) 12
D) 11 E) 18

**3.** Indique el valor

$$N = \text{arccot}\left(-\frac{1}{3}\right) + \text{arcsen}\left(-\frac{\sqrt{10}}{10}\right)$$

A) $\frac{\pi}{3}$ B) $\frac{\pi}{2}$ C) $\frac{\pi}{6}$
D) $\frac{\pi}{4}$ E) $-\frac{\pi}{2}$

**4.** Encontrar el equivalente de
cos (arc tan (sen (arc cot $x$)))

A) $\left(\frac{x^2+1}{x^2+2}\right)^{\frac{1}{2}}$ B) $\frac{x+1}{x+2}$ C) $\left(\frac{x^2+1}{x^2+2}\right)^2$

D) $\left(\frac{x^2+2}{x^2+1}\right)^2$ E) $\left(\frac{x^2+2}{x^2+1}\right)^{\frac{1}{2}}$

**5.** Determine el rango de

$$h(x) = \frac{2\pi}{|\arctan x| - \text{arccot}|x|}$$

A) $\langle -\infty; -4 \rangle \cup [4; \infty\rangle$
B) $\langle -\infty; -3\rangle \cup \langle 3; \infty\rangle$
C) $\langle -\infty; -5] \cup [5; \infty\rangle$
D) $\left\langle -\infty; -\frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{1}{2}; \infty\right\rangle$
E) $\langle -\infty; -4] \cup [4; \infty\rangle$

**6.** Reduzca la siguiente sumatoria

$$S = \sum_{k=1}^{n} \arctan\frac{2k}{2+k^2+k^4}$$

A) $\text{arc tan } (n^2+n+1) - \frac{\pi}{4}$

B) $\text{arc tan}\left(\frac{n(n+1)}{2}+n+2\right) + \frac{\pi}{4}$

C) $\text{arc tan}\left(\frac{n^2-1}{2++n^2+n}\right) - \frac{\pi}{4}$

D) $\text{arc tan}\left(\frac{n(n-1)}{n^2+n+2}\right) + \pi$

E) $\text{arc tan } (2n^2 - n + 1) + \pi$

**7.** Encontrar el equivalente de

$$2\text{arc tan x} + \text{arc sen}\frac{2x}{1+x^2} \quad \text{para } x > 1$$

A) $\pi$ B) $\frac{3\pi}{4}$ C) $\frac{\pi}{2}$
D) $4x$ E) $\frac{\pi}{3}$

**15.** Halle el rango de la función
$f(x) = \text{arc}\tan 2x - \text{arc}\cot 2x + \text{arc}\sec 2x - \text{arc}\csc 2x$

A) $\left\langle \pi; \frac{\pi}{2}\right]$ B) $\left[-\frac{\pi}{2}; \pi\right\rangle$ C) $[-\pi; \pi]$

D) $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ E) $\langle -\pi; \pi\rangle$

**16.** Halle el dominio y rango de la siguiente función $f(x) = \text{arc}\sec(\text{sen}x + \cos x)$

A) $\left[k\pi - \frac{\pi}{2}; k\pi\right]; \left[0; \frac{\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{4}; \pi\right]$

B) $\left[k\pi - \frac{\pi}{2}; k\pi + \frac{3\pi}{4}\right]; \left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{4}\right]$

C) $\left[k\pi; k\pi + \frac{\pi}{2}\right]; \left[0; \frac{\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{4}; \pi\right]$

D) $\left[2k\pi; 2k\pi + \frac{\pi}{2}\right]; [0; \pi]$

E) $\left[2k\pi; 2k\pi + \frac{3\pi}{4}\right\rangle; \left[\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right]$

**17.** Reduzca la expresión
$2\,\text{arc}\tan[\csc(\text{arc}\tan x) - \tan(\text{arc}\cot x)] - \text{arc}\tan x$

A) 1 B) $\pi$ C) 0

D) $\frac{\pi}{4}$ E) $\frac{\pi}{2}$

**18.** Siendo $\theta = \text{arc sen}\left(-\frac{\sqrt{2}}{3}\right)$

$\beta = \text{arc}\cot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

calcule el valor de $A = \dfrac{\cos\theta - \csc\beta}{\tan\theta\cot\beta}$

A) $-\frac{\sqrt{6}}{7}$ B) $-\frac{7\sqrt{6}}{18}$ C) $-\frac{7\sqrt{6}}{6}$

D) $-\frac{7\sqrt{6}}{3}$ E) $-\frac{7}{3}$

**19.** Reduzca la suma de $B = \sum_{k=1}^{6} \arctan(\cot k)$

A) $6\pi - 21$ B) $4\pi - 21$ C) $6\pi - 15$
D) $2\pi - 10$ E) 21

**20.** Calcule el dominio y rango

$y(x) = \sqrt{\arctan\sqrt{x-3}}$

A) $[0; 3\rangle$ ; $\left[1; \frac{\pi}{2}\right\rangle$

B) $\langle 3; 13\rangle$ ; $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$

C) $\langle 3; +\infty\rangle$ ; $\left\langle 0; \frac{\sqrt{2\pi}}{2}\right\rangle$

D) $\langle 3; +\infty\rangle$ ; $\left[0; \frac{\pi}{2}\right\rangle$

E) $[3; +\infty\rangle$ ; $\left[0; \frac{\sqrt{2\pi}}{2}\right\rangle$

**21.** Determine el valor de

$T = \cot\left(3\text{arcsen}\frac{2}{\sqrt{13}}\right) + \text{sen}(2\text{arccot}4)$

A) $\frac{215}{391}$ B) $\frac{153}{46}$ C) $\frac{215}{782}$

D) $\frac{215}{17}$ E) $\frac{391}{368}$

6. Al resolver el sistema, indique el valor de

$$\begin{cases} \text{sen}x = \csc x + \text{sen}y \\ \cos x = \sec x + \cos y \end{cases}$$

Si : k; n $\in \mathbb{Z}$

A) $(2k+n)\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{8}$

B) $(2n+k)\frac{\pi}{2}+\frac{3\pi}{4}$

C) $(2k+3n)\pi-\frac{\pi}{4}$

D) $(k+n)\frac{\pi}{2}$

E) $(2k-1)\frac{\pi}{3}$

7. Resuelva

sen $(x+y) = 4\cos x \cos y$

$\tan x + \tan y + \tan x \tan y = 5$

A) $\begin{cases} x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4} \\ y=\frac{k\pi}{2}\pm\frac{\pi}{12} \end{cases}$

B) $\begin{cases} x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{5} \\ y=\frac{k\pi}{4}+\frac{\pi}{6} \end{cases}$

C) $\begin{cases} x=k\pi-\frac{\pi}{3} \\ y=k\pi-\frac{\pi}{4} \end{cases}$

D) $\begin{cases} x=k\pi+\frac{\pi}{4} \\ y=k\pi-\frac{\pi}{3} \end{cases}$

E) $\begin{cases} x=\frac{k\pi}{4}+\frac{\pi}{3} \\ y=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{5} \end{cases}$

8. Resuelva e indique la suma de soluciones en el intervalo $\langle 0; \pi\rangle$. Dada la ecuación $\text{sen}x\,(\text{sen}^3x+9) = 10\csc x - \cos^4 x$

A) $\frac{3\pi}{4}$ B) $\frac{2\pi}{3}$ C) $\frac{\pi}{2}$

D) $\pi$ E) $\frac{3\pi}{2}$

9. Si

$(\text{sen}2x+\cos(2x+60°)+\cos(2x-60))^2 = 2+\cos\left(\frac{\pi}{4}-2x\right)$;

k $\in \mathbb{Z}$ luego el conjunto solución para $x$, será

A) $k\pi \pm \frac{1}{2}\arccos\left(\frac{1-\sqrt{17}}{4}\right)$

B) $k\pi + \arccos\left(\frac{1-\sqrt{13}}{4}\right)$

C) $2k\pi \pm \arccos\left(\frac{\sqrt{17}-1}{4}\right)$

D) $k\pi + \frac{\pi}{8} \pm \frac{1}{2}\arccos\left(\frac{1-\sqrt{17}}{4}\right)$

E) $2k\pi \pm \arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$

10. Dadas las ecuaciones, determine la suma del menor valor positivo de $x$ e $y$

$|\cot x| = \cot x + \frac{1}{\text{sen}x}$ ... (1)

$\text{sen}\,x\cos(x-y)+\cos\,x\,\text{sen}(y-x) = \text{sen}\frac{5\pi}{12}$

$-2\text{sen}\frac{\pi}{4}\text{sen}\frac{\pi}{3}$ ... (2)

A) $\frac{9\pi}{4}$ B) $\frac{11\pi}{4}$ C) $\frac{5\pi}{4}$

D) $\frac{\pi}{4}$ E) $\frac{7\pi}{4}$

**30.** Resuelva e indique el conjunto solución de la siguiente ecuación

$$2\,\mathrm{sen}^2\left(\frac{\pi\mathrm{sen}x}{3}\right) = 1 - \cos\left(\frac{2\pi\cos x}{3}\right)$$

A) $k\pi + \frac{\pi}{6}$

B) $k\pi - \frac{\pi}{3}$

C) $k\pi - \arctan(1)$

D) $k\pi \pm \arctan\left(\frac{4}{3}\right)$

E) $k\pi + \mathrm{arc\,tan}(1)$

**31.** Si $\mathrm{arcsen}x - \arccos x + \arctan x - \mathrm{arccot}x = 0$ halle el c.s de $\theta$, si $x^2 = 2\cos\theta - 1$

A) $2k\pi \pm \frac{\pi}{10}$ B) $k\pi + \frac{\pi}{10}$

C) $2k\pi \pm \frac{\pi}{5}$

D) $k\pi + \frac{\pi}{5}$ E) $k\pi + (-1)^k\frac{\pi}{5}$

**32.** Resuelva $\dfrac{\cos\left(3x + \frac{7\pi}{4}\right) - \sqrt{2}}{3\mathrm{sen}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \sqrt{2}} = -1;\ k \in Z$

A) $k\pi - \frac{\pi}{4}$ B) $k\pi + \frac{\pi}{4}$ C) $(2k+1)\frac{\pi}{2}$

D) $k\pi + (-1)^k\frac{\pi}{4}$ E) $2k\pi \pm \frac{3\pi}{4}$

**33.** Resuelva

$$\tan\left(\mathrm{arcsen}\sqrt{1-x^2}\right) - \mathrm{sen}(\arctan 2) = 0$$

A) $\frac{\sqrt{5}}{3}$ B) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ C) $\frac{\sqrt{5}}{2}$

D) $\pm\frac{\sqrt{5}}{3}$ E) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

**34.** Resuelva

$$\arctan\frac{x}{2} + \arctan(x-1) + \arctan(x+1) = \frac{\pi}{2}$$

A) 1 B) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ C) 2

D) $-1$ E) $\frac{1}{2}$

**35.** Resuelva $\arccos\left(\frac{x}{2} + \frac{1}{3}\right) = 2\arccos\left(\frac{x}{2}\right)$

A) $\frac{\sqrt{11}-2}{2}$ B) $\frac{4-\sqrt{13}}{3}$ C) $\frac{\sqrt{33}+3}{12}$

D) $\frac{\sqrt{33}+3}{6}$ E) $\frac{3\pm\sqrt{33}}{6}$

**36.** Resuelva

$$\frac{2\mathrm{sen}^2x + \mathrm{cov}x - 2 + 2\mathrm{sen}x}{\mathrm{sen}x + 1} > 0;\ x \in \langle 0; \pi\rangle$$

A) $\left\langle\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right\rangle$ B) $\left\langle\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}\right\rangle$ C) $\left\langle\frac{\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}\right\rangle$

D) $\left\langle\frac{\pi}{3}; \frac{5\pi}{6}\right\rangle$ E) $\left\langle\frac{\pi}{5}; \frac{5\pi}{3}\right]$